

NOTIZEN ZUM VORTRAG ÜBER  
DAS CONWAY-POLYNOM

Version  $\gamma$

Seminar zur Knotentheorie  
Prof. E. Vogt, Prof. M. Aigner

Friederike Greb  
friederike.greb@gmx.net

Annette Huck  
huck@math.hu-berlin.de

FU Berlin, Sommersemester 2005

# Inhaltsverzeichnis

1	Notation von Kauffmann . . . . .	1
2	Linking-Number . . . . .	1
2.1	Definition . . . . .	1
2.2	Beispiele . . . . .	2
2.3	Äquivalente Charakterisierung . . . . .	2
3	Definition des Conway-Polynoms . . . . .	3
3.1	Definition . . . . .	3
3.2	Berechnungen . . . . .	4
4	Eindeutigkeit . . . . .	5
4.1	Notwendige Struktur von $a_0$ . . . . .	5
4.2	Notwendige Struktur von $a_1$ . . . . .	5
4.3	Standardsequenz für Knoten . . . . .	7
4.4	Standardsequenz für Links . . . . .	7
4.5	Notwendige Struktur von $a_n$ ( $n \geq 2$ ) . . . . .	8
5	Existenz . . . . .	8
5.1	Definition von $P$ . . . . .	8
5.2	Beweisstruktur . . . . .	9
5.3	Induktionsanfang . . . . .	9
5.4	Induktionsschritt . . . . .	11
	A Unabhängigkeit von der Lage des Basispunkts . . . . .	11
	B Invarianz unter Reidemeisterbewegungen . . . . .	17
	C Skein-Relation . . . . .	19
	D Split-Link . . . . .	21
	E Unknoten . . . . .	21
	F Unabhängigkeit von Reihenfolge der Komponenten . . . . .	21

### Zusammenfassung

Das Ziel ist eine Zuordnung  $: \text{Diagramm} \mapsto \text{Polynom}$ .

Diagramme, die sich durch Reidemeisterbewegung ineinander überführen lassen, sollen dabei dasselbe Polynom erhalten. Auf diese Weise ist den Äquivalenzklassen von Diagrammen (somit Links) ein Polynom zugeordnet, d.h. man kann durch Unterschiede der Polynome Rückschlüsse darauf ziehen, dass die Äquivalenzklassen verschieden sind.

Das Conway-Polynom unterscheidet Knoten, deren Diagramme bis zu neun Überkreuzungen haben.

# 1 Notation von Kauffmann

Links bestehen aus endlich vielen Komponenten. Knoten sind Links mit genau einer Komponente. Wir betrachten im Folgenden immer orientierte Links.

Seien gewisse Kreuzungen in einem Diagramm  $D_L$  eines Links  $L$  mit  $i = 1, \dots, n$  indiziert.

Dann ist  $S_i(D_L)$  das Diagramm eines Links nach einem Switch der  $i$ -ten Kreuzung in  $D_L$ , d.h.

$$S \left[ \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \end{array} \right] = \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \quad \text{und} \quad S \left[ \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array} \right] = \begin{array}{c} \swarrow \\ \nwarrow \end{array}$$

$E_i(D_L)$  ist das Diagramm eines Links nach Auflösen der  $i$ -ten Kreuzung in  $D_L$ , d.h.

$$E \left[ \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \end{array} \right] = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} = E \left[ \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array} \right]$$

$\epsilon_i(D_L)$  bezeichnet das Vorzeichen der  $i$ -ten Kreuzung in  $D_L$ , d.h.

$$\epsilon \left[ \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \end{array} \right] = +1 \quad \text{und} \quad \epsilon \left[ \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array} \right] = -1$$

# 2 Linking-Number

## 2.1 Definition

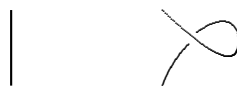
Sei  $L$  ein Link aus zwei Komponenten  $\alpha$  und  $\beta$ . Indiziere in einem Diagramm  $D_L$  die Überkreuzungen von  $\alpha$  mit  $\beta$ , nenne die Indexmenge  $\alpha \cap \beta$ .

$$\text{lk}(L) := \frac{1}{2} \sum_{i \in \alpha \cap \beta} \epsilon_i(D_L)$$

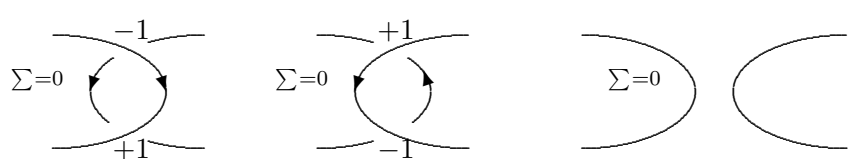
heißt Linking-Number von  $L$ . Sie ist von der Wahl des Diagramms  $D_L$  unabhängig, also eine Invariante von  $L$ .

*Beweis:* mit Reidemeisterbewegungen

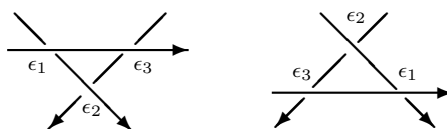
(1) betrifft nur eine Komponente



(2) in der Summe null

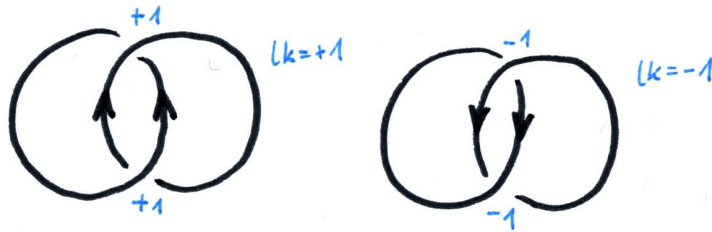


(3) gleiche Art von Kreuzungen

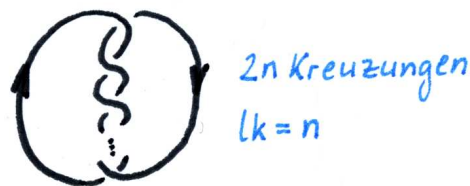


## 2.2 Beispiele

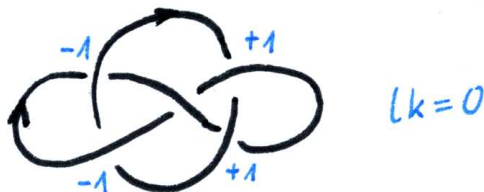
Hopf-Links



Zöpfe mit  $2n$  Kreuzungen



Whitehead-Link (verschlungene Links können also auch  $lk = 0$  haben)



## 2.3 Äquivalente Charakterisierung

Sei  $S$  eine Hintereinanderausführung von Switches  $S = S_{i_n} \cdots S_{i_1}$  mit  $i_1, \dots, i_n \in \alpha \sqcap \beta$  (switching sequence), so dass die beiden Komponenten in  $S_{i_n} \cdots S_{i_1}(D_L)$  getrennt sind. (Getrennt heißt, dass man mit Reidemeisterbewegungen zu einem Diagramm gelangen kann, das aus zwei nichtleeren Teilen besteht, die in disjunkten Umgebungen liegen.) Dann gilt

$$lk(L) = \sum_{i_j} \epsilon_{i_j}(D_L)$$

d.h. die Linking-Number ist die Summe der Vorzeichen einer beliebigen Menge von Kreuzungen, deren Switchen den Link trennt.

*Beweis:*

$lk$  : Link  $\mapsto$  Zahl, deshalb betrachten wir die Äquivalenzklasse  $\overline{S_{i_1}(D_L)}$

$$\begin{aligned} lk(L) &= \frac{1}{2} \epsilon_{i_1}(D_L) + \frac{1}{2} \sum_{i \in \alpha \sqcap \beta, i \neq i_1} \epsilon_i(D_L) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{i_1}(D_L) + \frac{1}{2} \sum_{i \in \alpha \sqcap \beta, i \neq i_1} \epsilon_i(S_{i_1}(D_L)) \\ &= \left( \frac{1}{2} \epsilon_{i_1}(D_L) + \frac{1}{2} \epsilon_{i_1}(D_L) \right) + \left( -\frac{1}{2} \epsilon_{i_1}(D_L) + \frac{1}{2} \sum_{i \in \alpha \sqcap \beta, i \neq i_1} \epsilon_i(S_{i_1}(D_L)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_{i_1}(D_L) + \left( \frac{1}{2} \epsilon_{i_1}(S_{i_1}(D_L)) + \frac{1}{2} \sum_{i \in \alpha \sqcap \beta, i \neq i_1} \epsilon_i(S_{i_1}(D_L)) \right) \\
&= \epsilon_{i_1}(D_L) + \text{lk}(\overline{S_{i_1}(D_L)}) \\
\implies \quad \text{lk}(L) &= \text{lk}(\overline{S_{i_1}(D_L)}) + \epsilon_{i_1}(D_L) = \dots = \underbrace{\text{lk}(S_{i_n} \cdots S_{i_1}(D_L))}_{=0} + \sum_{i_j} \epsilon_{i_j}(D_L)
\end{aligned}$$

Aus der Definition ergibt sich, dass getrennte Links die Linking-Number 0 haben, da es ein Diagramm gibt, in dem die Komponenten keine Kreuzungen haben, also  $\alpha \sqcap \beta$  leer ist.  $\square$

### 3 Definition des Conway-Polynoms

Das Ziel ist eine Zuordnung  $\text{Diagramm} \mapsto \text{Polynom}$ .

Diagramme, die sich durch Reidemeisterbewegung ineinander überführen lassen, sollen dabei dasselbe Polynom erhalten. Auf diese Weise ist den Äquivalenzklassen von Diagrammen (somit Links) ein Polynom zugeordnet, d.h. man kann durch Unterschiede der Polynome Rückschlüsse darauf ziehen, dass die Äquivalenzklassen verschieden sind.

Das Conway-Polynom unterscheidet Knoten, deren Diagramme bis zu neun Überkreuzungen haben.

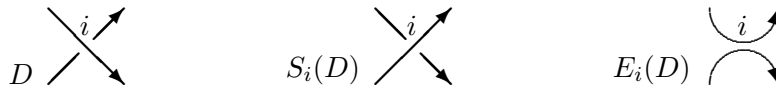
#### 3.1 Definition

Wird jedem Diagramm  $D$  ein Polynom  $\nabla_D$  zugeordnet, dann heißen diese Polynome Conway-Polynome, falls gilt:

(C1) Äquivalente Diagramme erhalten identische Polynome.

(C2) Der Unknoten  $U$  hat das Polynom  $\nabla_U = 1$ .

(C3) Für eine Kreuzung  $i$  in einem Diagramm  $D$  gilt:  $\epsilon_i(D) \cdot (\nabla_D - \nabla_{S_i(D)}) = z \nabla_{E_i(D)}$



Diese Bedingung wird auch *Skein-Relation* genannt (engl. skein bedeutet Strang).

Forderung (C1) ist das Ziel, d.h. diese Eigenschaft wollen wir zur Untersuchung der Knoten benutzen und nur deshalb wollen wir so ein Polynom. Für die weitere Definition bedeutet das:  $D \stackrel{\text{Reide}}{\sim} D' \implies \nabla_D = \nabla_{D'}$ . Also ist  $\nabla_{\overline{D_L}}$  und somit  $\nabla_L$  wohldefiniert.

Forderung (C2) ist eine Normierung. Sie gibt die Eindeutigkeit des Polynoms. An dieser Stelle von  $\nabla_U$  zu sprechen ( $U$  ist ein Knoten und kein Diagramm!), macht Sinn wegen (C2).

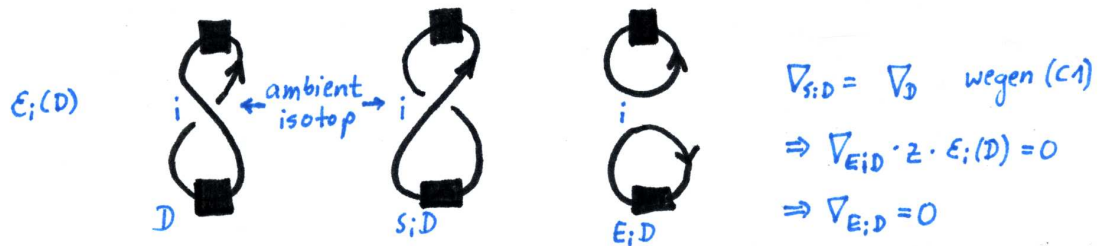
Die Skein-Relation (C3) ist eine geschickt gewählte Struktur, die es letztendlich ermöglicht so ein Polynom zu finden. Durch sie erreicht man rekursiv eine explizite Angabe der Polynome. Sie liefert damit die Existenz eines Polynoms, das (C1) und (C2) erfüllt.

Der Vorfaktor  $\epsilon_i(D)$  geht darauf zurück, dass die Skein-Relation einen Zusammenhang zwischen strangverwandten Diagrammen  $D^+$ ,  $D^-$  und  $D^0$  herstellt. Die Idee der Skein-Relation ist dann, dass  $\nabla_{D^+} - \nabla_{D^-} = z\nabla_{D^0}$ . Letztendlich dient die Schreibweise mit den Operatoren  $S$ ,  $E$  und dem Vorzeichen  $\epsilon$  nur der Formalisierung und übersichtlichen Beweisführung.

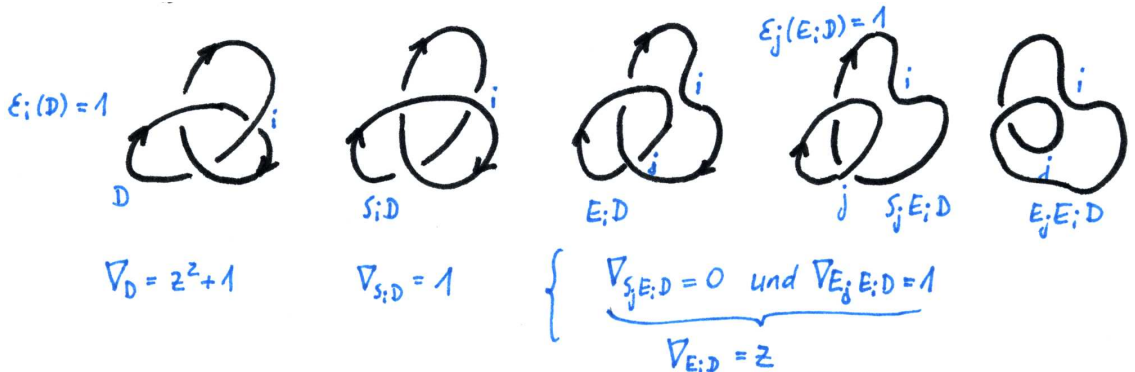
### 3.2 Berechnungen

Falls eine Zuordnung  $\nabla : \text{Diagramm} \mapsto \text{Polynom}$  existiert, die (C1)-(C3) erfüllt, dann ergeben sich daraus für spezielle Knoten folgende Polynome:

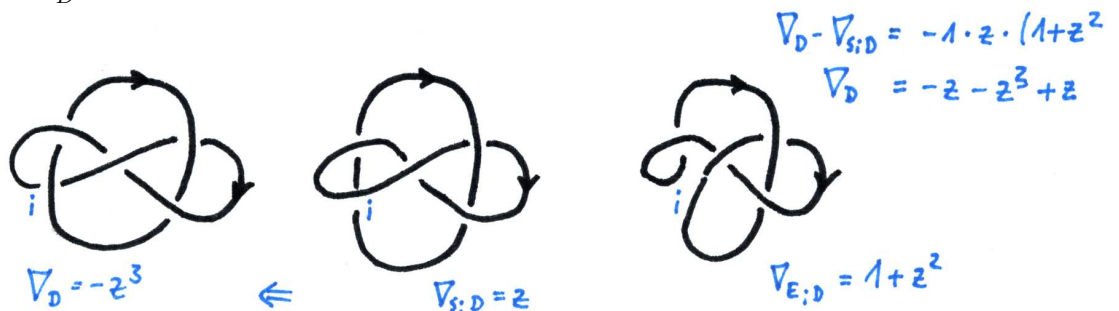
Split-Link  $\nabla_D = 0$



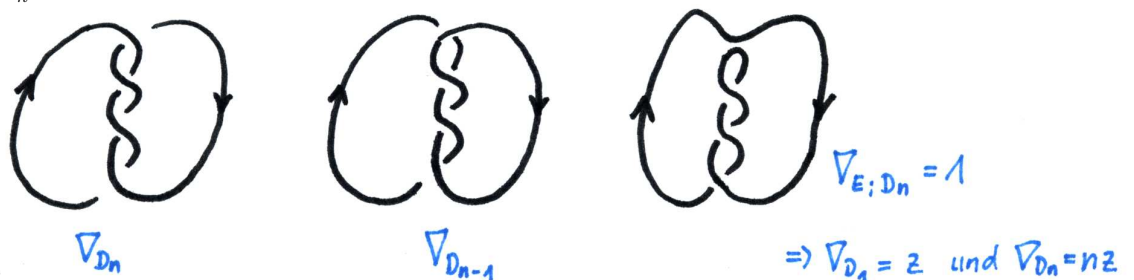
Kleeblatt  $\nabla_D = 1 + z^2$



Whitehead  $\nabla_D = -z^3$



Zöpfe  $\nabla_{D_n} = nz$



## 4 Eindeutigkeit

Zunächst werden wir Aussagen über die Koeffizienten des Conway-Polynoms aus den Forderungen (C1) bis (C3) folgern. Wir werden feststellen, dass die Koeffizienten dadurch eindeutig festgelegt sind.

Sei  $\nabla : \text{Diagramm} \mapsto \text{Polynom}$  ein Conway-Polynom. Dann hat  $\nabla_D$  die Form

$$\nabla_D(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

### 4.1 Notwendige Struktur von $a_0$

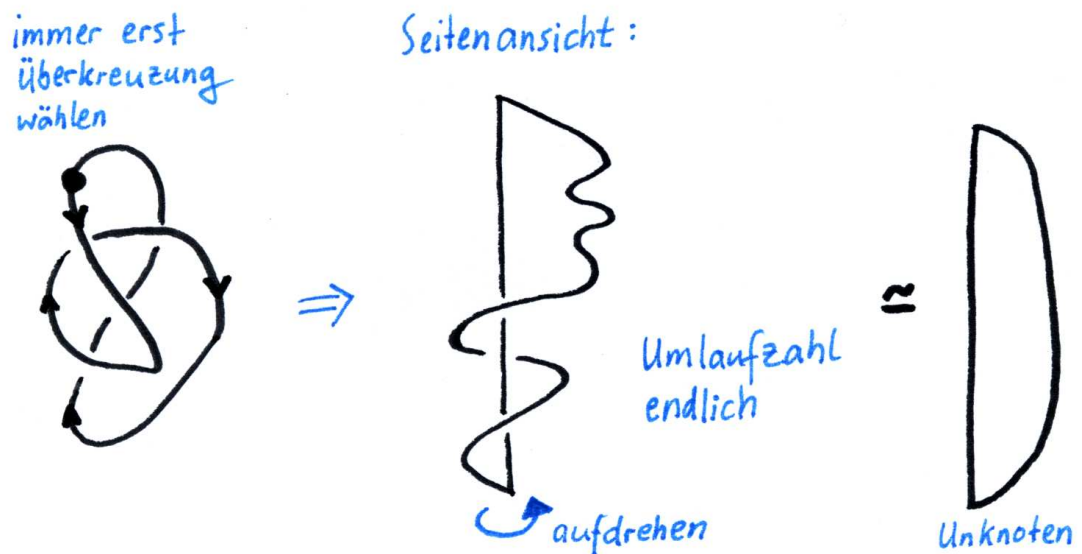
Der Koeffizient  $a_0$  von  $\nabla_D$  ist von der Form

$$a_0(D) = \begin{cases} 1 & : D \text{ besteht aus einer Komponente} \\ 0 & : D \text{ besteht aus mehreren Komponente} \end{cases}$$

*Beweis:*

$\epsilon_i(D) \cdot (a_0(D) - a_0(S_i(D))) = 0$  folgt aus der Skein-Relation (C3) durch Koeffizientenvergleich. Äquivalent dazu ist  $a_0(D) = a_0(S_i(D))$ , d.h.  $a_0$  ist invariant gegenüber Switchen.

Es existiert eine Switch-Sequenz, die  $D$  in ein getrenntes, entknotetes Diagramm  $D^*$  überführt.



Also  $a_0(D) = a_0(D^*) = \begin{cases} 0 & \text{falls } D^* \text{ aus mehreren Komp. besteht, nach Berechnung: } \nabla_{D^*} = 0 \\ 1 & \text{falls } D^* \text{ aus einer Komp. besteht, denn nach Axiom (C2): } \nabla_{D^*} = 1 \end{cases}$   $\square$

### 4.2 Notwendige Struktur von $a_1$

Der Koeffizient  $a_1$  von  $\nabla_D$  ist von der Form

$$a_1(D) = \begin{cases} \text{lk}(\overline{D}) & : D \text{ besteht aus genau zwei Komponenten} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$



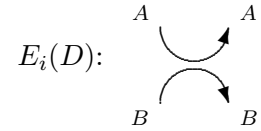
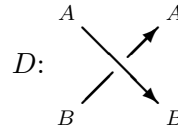
*Beweis:*

$$\epsilon_i(D) \cdot \left( a_1(D) - a_1(S_i(D)) \right) = a_0(E_i(D))$$

1.  $D$  hat eine Komponente

$\implies E_i(D)$  hat zwei Komponenten

$\implies a_0(E_i(D)) = 0$

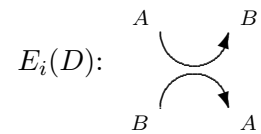
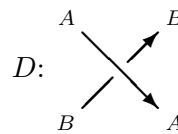


2.  $D$  hat zwei Komponenten

(a)  $i$ -te Kreuzung involviert beide Komponenten

$\implies E_i(D)$  hat eine Komponente

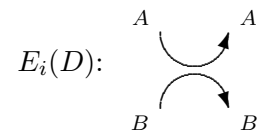
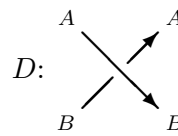
$\implies a_0(E_i(D)) = 1$



(b)  $i$ -te Kreuzung involviert nur eine der Komponenten

$\implies E_i(D)$  hat drei Komponenten

$\implies a_0(E_i(D)) = 0$

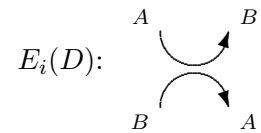
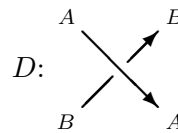


3.  $D$  hat  $n > 2$  Komponenten

(a)  $i$ -te Kreuzung involviert zwei Komponenten

$\implies E_i(D)$  hat  $n - 1$  Komponenten, also mehr als eine

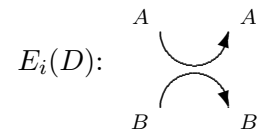
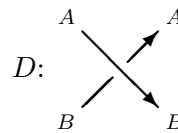
$\implies a_0(E_i(D)) = 0$



(b)  $i$ -te Kreuzung involviert nur eine der Komponenten

$\implies E_i(D)$  hat  $n + 1$  Komponenten, also mehr als eine

$\implies a_0(E_i(D)) = 0$



$$\implies a_1(D) - a_1(S_i(D)) = \begin{cases} \epsilon_i(D) & : D \text{ hat zwei Komponenten und } i\text{-te Kreuzung involviert beide Komponenten} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Das bedeutet für  $a_1(D)$ :

a) Ist die Differenz null, so ist  $a_1$  invariant unter Switchen.

Es gibt eine Switch-Sequenz  $S_m \dots S_1$ , die  $D$  trennt und entknotet ( $D^*$ ).

Switchen erhält auf jeden Fall die Anzahl der Komponenten.

Deshalb ist  $a_1(D) = a_1(D^*) = 0$  falls  $D$  eine oder mehr als zwei Komponenten hat.

- b) Falls  $D$  aus zwei Komponenten besteht, wähle eine Switch-Sequenz  $S_m \dots S_1$ , die  $D$  trennt und entknotet ( $D^*$ ).

$$\implies a_1(D) = \begin{cases} \epsilon_i(D) + a_1(S_i(D)) & : \text{ } i\text{-te Kreuzung involviert beide Komponenten} \\ a_1(S_i(D)) & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\implies a_1(D) = \underbrace{a_1(S_m \dots S_1(D))}_{=a_1(D^*)=0} + \underbrace{\sum_{i \text{ 2 Komp Xing}} \epsilon_i(D)}_{=\text{lk}(\bar{D})} = \text{lk}(\bar{D})$$

$$\boxed{\implies a_1(D) = \text{lk}(\bar{D}) \text{ falls } D \text{ genau zwei Komponenten hat}}$$

□

### 4.3 Standardsequenz für Knoten

1. Erzeugen eines Unknotendiagramms aus dem Knotendiagramm  $D$ :

Nehme das Universum des Diagramms  $D$ . Wähle einen Basispunkt  $p$  aus dem Universum, der nicht auf einer Kreuzung liegt. Gehe entlang des Universums in Richtung der Orientierung. Wenn man auf eine Kreuzung zum ersten Mal trifft, dann die Überkreuzung, beim zweiten Mal entsprechend die Unterkreuzung wählen. Damit enthält man ein Unknotendiagramm  $D^*(p)$  (Erklärung in 4.1). Dieses entknotete Diagramm hängt von der Wahl des Basispunktes ab.

2. Benennen der Kreuzungen, die zum Entknoten beitragen:

Vergleiche die Kreuzungen von  $D$  und  $D^*(p)$ . Die sich unterscheidenden Kreuzungen werden mit  $1, \dots, n$  auf folgende Weise benannt: Durchlaufe ausgehend vom Basispunkt das Diagramm in Richtung der Orientierung, und benenne die entsprechenden Kreuzungen von  $n$  bis 1 in der Reihenfolge des Auftretens.

3. Definition der Standardsequenz:

Falls sich Kreuzungen unterscheiden, also  $D \neq D^*(p)$ , erhält man eine Sequenz  $S_1, \dots, S_n$ , so dass  $S_n \dots S_1(D) = D^*(p)$ . Diese Sequenz ist vom gewählten Basispunkt abhängig; wir nennen sie eine Standardsequenz. Andernfalls, also wenn  $D = D^*(p)$ , nennen wir die Standardsequenz leer.

### 4.4 Standardsequenz für Links

Der Link bestehe aus  $k$  Komponenten.

1. Dann lässt sich aus dem Universum ein getrenntes, entknotetes Diagramm  $D^*(p_1, \dots, p_k)$  finden, mit den Basispunkten  $p_1, \dots, p_k$ .
2. Bilde nun die Standardsequenz wie für Knotendiagramme, indem man die Komponenten von den Basispunkten  $p_1, \dots, p_k$  aus, der Reihe nach durchläuft. Beziehe beim Benennen alle sich ändernden Kreuzungen ein (egal, ob zwischen gleichen Komponenten oder unterschiedlichen).
3. In Abhängigkeit von den  $k$  Basispunkten  $p_1, \dots, p_k$  ist somit die Standardsequenz  $S_1, \dots, S_n$ , mit  $S_n \dots S_1(D) = D^*(p_1, \dots, p_k)$ , eindeutig definiert. Wenn  $D = D^*(p_1, \dots, p_k)$  nennen wir die Standardsequenz leer.

Analog zur Erklärung in 4.1 erzeugt die Standardsequenz eines Linkdiagramms ein entknotetes Linkdiagramm, in dem alle Komponenten getrennt liegen.

#### 4.5 Notwendige Struktur von $a_n$ ( $n \geq 2$ ) in Abhängigkeit von $a_{n-1}$ und Standardsequenzen

Sei  $S_m \dots S_1$  eine Standardsequenz. Dann ist  $a_n$  für  $n \geq 2$  von der Form

$$a_n(D) = \epsilon_1(D) \cdot a_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{i=2}^m \epsilon_i(D) \cdot a_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)).$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} a_n(D) - a_n(S_1(D)) &\stackrel{(C3)}{=} \epsilon_1(D) \cdot a_{n-1}(E_1(D)) \\ a_n(S_1(D)) - a_n(S_2 S_1(D)) &\stackrel{(C3)}{=} \underbrace{\epsilon_2(S_1(D))}_{=\epsilon_m(D)} \cdot a_{n-1}(E_2 S_1(D)) \\ &\vdots \\ a_n(S_{m-1} \dots S_1(D)) - \underbrace{a_n(S_m \dots S_1(D))}_{a_n(D^*)=0} &\stackrel{(C3)}{=} \underbrace{\epsilon_m(S_{m-1} \dots S_1(D))}_{=\epsilon_m(D)} \cdot a_{n-1}(E_m S_{m-1} \dots S_1(D)) \end{aligned}$$

$$\implies a_n(D) = \epsilon_1(D) \cdot a_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{i=2}^m \epsilon_i(D) \cdot a_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \quad \square$$

## 5 Existenz

Es bleibt nun zu zeigen, dass dieses so festgelegte Polynom auch die Forderungen (C1) bis (C3) erfüllt, um die Existenz des Conway-Polynoms zu zeigen. Dazu definieren wir  $P_D(z) = \alpha_0(D) + \alpha_1(D) \cdot z + \dots + \alpha_n(D) \cdot z^n$  entsprechend den notwendigen Bedingungen an die Koeffizienten.

### 5.1 Definition von $P$

Um  $P : \text{Diagramm} \mapsto \text{Polynom}$  zu definieren, lege für alle Diagramme  $D$  die Koeffizienten von  $P_D(z) = \alpha_0(D) + \alpha_1(D) \cdot z + \dots + \alpha_n(D) \cdot z^n$  folgendermaßen fest:

$$\begin{aligned} \alpha_0(D) &:= \begin{cases} 1 & : D \text{ besteht aus einer Komponente} \\ 0 & : D \text{ besteht aus mehreren Komponente} \end{cases} \\ \alpha_1(D) &:= \begin{cases} \text{lk}(\overline{D}) & : D \text{ besteht aus genau zwei Komponenten} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Seien  $p_1, \dots, p_k$  Basispunkte und  $S_m \dots S_1$  die daraus festgelegte Standardsequenz.

$$\alpha_n(D) := \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{i=2}^m \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \quad \forall n \geq 2$$

Sollte für die Basispunkte  $p_1, \dots, p_k$  die Standardsequenz leer sein, definieren wir:

$$\alpha_n(D) := 0 \quad \forall n \geq 2$$

## 5.2 Beweisstruktur

Zu zeigen ist ...

- ... die Wohldefiniertheit von  $P_D(z)$ , denn die Standardsequenz hängt von der Wahl der Basispunkte ab. Dazu wählt man die Reihenfolge der Komponenten einerseits und andererseits die Lage des Basispunktes auf der Komponenten.
- ... dass  $P_D(z)$  Conway-Polynom ist, also (C1)–(C3) erfüllt.

Mit vollständiger Induktion über  $n \in \mathbb{N}$  werden dafür folgende Aussagen der Reihe nach gezeigt:

- [UnBas]  $\alpha_n(D)$  ist unabhängig von der Lage des Basispunkts auf der Komponente
- [Reide]  $\alpha_n(D)$  ist invariant unter Reidemeisterbewegung, d.h. erfüllt (C1)
- [Skein]  $\alpha_n(D)$  erfüllt (C3)
- [Split]  $\alpha_n(\text{Split-Link}) = 0$
- [Unknot]  $\alpha_1(\text{Unknoten}) = 1$  und  $\alpha_n(\text{Unknoten}) = 0$  ab  $n > 0$ , d.h. erfüllt (C2)
- [UnKomp]  $\alpha_n(D)$  ist unabhängig von der Reihenfolge der Komponenten, d.h.  $\alpha_n(D)$  ist wohldefiniert

Der Induktionsanfang umfasst, dass für ein beliebiges Diagramm  $D$  [UnBas], [Reide], [Skein] und [UnKomp] für  $\alpha_1(D)$  und  $\alpha_2(D)$  gewährleistet sind. Weiterhin, dass [Split], [Unknot] für  $n = 1$  und  $n = 2$  gilt. Wir brauchen diesen doppelten Induktionsanfang, um später im Induktionsschritt zwei Indices zurückgehen zu können.

Der Induktionsschritt zeigt, dass unter der Annahme, [UnBas] bis [UnKomp] gelte für alle Diagramme bis  $n - 1$ , die Aussagen [UnBas] bis [UnKomp] für alle Diagramme auch für  $n$  gelten. Bereits im Induktionsschritt bewiesene Aussagen (z.B. [UnBas] für  $n$ ) werden dabei auch für den Beweis von darauffolgenden Aussagen (z.B. [Skein] für  $n$ ) benötigt. Deshalb ist es notwendig diese ganzen Aussagen innerhalb eines einzigen Induktionsbeweises zu zeigen.

## 5.3 Induktionsanfang

$$\boxed{n = 0}$$

$$\alpha_0(D) = \begin{cases} 1 & : D \text{ besteht aus einer Komponente} \\ 0 & : D \text{ besteht aus mehreren Komponente} \end{cases}$$

- [Reide]  $\alpha_0(D)$  ist invariant unter Reidemeisterbewegung
- [UnKomp], [UnBas]  $\alpha_0(D)$  ist wohldefiniert
- [Skein]  $\alpha_0(D) - \alpha_0(S_i D) = 0$ ,  
denn Switchen erhält die Anzahl der Komponenten
- [Split]  $\alpha_0(\text{Split-Link}) = 0$   
weil ein Split-Link mindestens zwei Komponenten hat
- [Unknot]  $\alpha_0(\text{Unknoten}) = 1$   
weil der Unknoten eine Komponente hat

$$\boxed{n = 1}$$

$$\alpha_1(D) = \begin{cases} \text{lk}(\overline{D}) & : D \text{ besteht aus genau zwei Komponenten} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

[Reide]  $\alpha_1(D)$  ist invariant unter Reidemeisterbewegung (in 2. gezeigt)

[UnKomp], [UnBas]  $\alpha_1(D)$  ist wohldefiniert

[Skein] z.z.  $\alpha_1(D) - \alpha_1(S_i D) = \epsilon_i(D) \cdot \alpha_0(E_i D)$

1.Fall  $D$  hat eine Komponente

$$\text{z.z. } \alpha_1(D) - \alpha_1(S_i D) = \epsilon_i(D) \cdot \alpha_0(E_i D)$$

$$\text{l.S.: } \alpha_1(D) - \alpha_1(S_i D) = 0 - 0 = 0, \quad \text{r.S.: } \epsilon_i(D) \cdot \alpha_0(E_i D) = \epsilon_i(D) \cdot 0 = 0$$

2.Fall  $D$  hat zwei Komponenten

$$\text{z.z. } \alpha_1(D) - \alpha_1(S_i D) = \epsilon_i(D) \cdot \alpha_0(E_i D)$$

l.S.: Kreuzung involviert beide Komponenten:

(a) Wir finden eine Switch-Sequenz  $S = S_{j_m} \dots S_{j_1}$ , die  $D$  trennt, und  $S_i$  ist nicht in  $S$  enthalten

$\implies$  Also ist  $S_i S$  eine Switch-Sequenz, die  $S_i D$  trennt.

$$\implies \alpha_1(D) - \alpha_1(S_i D) = \text{lk}(\overline{D}) - \text{lk}(\overline{S_i D})$$

$$= \sum_{j_k} \epsilon_{j_k}(D) - \left( \sum_{j_k} \epsilon_{j_k}(S_i D) + \epsilon_i(S_i D) \right) = -\epsilon_i(S_i D) = \epsilon_i(D)$$

(b) Wir finden eine Switch-Sequenz  $S = S_{j_m} \dots S_{j_1}$ , die  $D$  trennt, und  $S_i$  ist in  $S$  enthalten

$\implies$  Also ist  $S_{j_m} \dots \hat{S}_i \dots S_{j_1}$  eine Switch-Sequenz, die  $S_i D$  trennt.

$$\implies \alpha_1(D) - \alpha_1(S_i D) = \text{lk}(\overline{D}) - \text{lk}(\overline{S_i D}) = \sum_{j_k} \epsilon_{j_k}(D) - \sum_{j_k \neq i} \epsilon_{j_k}(S_i D) = \epsilon_i(D)$$

Kreuzung involviert nur eine Komponente:

(c) Ist  $S$  eine Switch-Sequenz, die  $D$  trennt, so trennt sie auch  $S_i D$ .

$$\implies \alpha_1(D) - \alpha_1(S_i D) = \text{lk}(\overline{D}) - \text{lk}(\overline{S_i D}) = 0$$

$$\text{r.S.: } \epsilon_i(D) \cdot \alpha_0(E_i D) = \begin{cases} \epsilon_i(D) & : \text{i.te Kreuzung involviert beide Komponenten} \\ 0 & : \text{i.te Kreuzung involviert eine Komponente} \end{cases}$$

3.Fall  $D$  hat mehr als zwei Komponenten

$$\text{z.z. } \alpha_1(D) - \alpha_1(S_i D) = \epsilon_i(D) \cdot \alpha_0(E_i D)$$

$$\text{l.S.: } \alpha_1(D) - \alpha_1(S_i D) = 0 - 0 = 0, \quad \text{r.S.: } \epsilon_i(D) \cdot \alpha_0(E_i D) = \epsilon_i(D) \cdot 0 = 0$$

[Split]  $\alpha_1(\text{Split-Link}) = 0$   
weil es ein Diagramm gibt ohne Überkreuzungen zwischen zwei verschiedenen Komponenten

[Unknot]  $\alpha_1(\text{Unknoten}) = 0$   
weil der Unknoten eine Komponente hat

## 5.4 Induktionsschritt

Nach Induktionsannahme gelten [UnBas], [Reide], [Skein], [Split], [Unknot] und [UnKomp] für alle Diagramme bis  $n - 1$ . Die Induktionsbehauptung ist, dass diese Aussagen für alle Diagramme für  $n$  gelten.

### A Unabhängigkeit von der Lage des Basispunkts [UnB]

Bisher hängt  $\alpha_n(D, p_1, \dots, p_k)$  von  $(p_1, \dots, p_k)$  ab. Für beliebiges  $l \in \{1, \dots, k\}$  setze  $p = p_l$ .

Es reicht zu zeigen, dass  $\alpha_n(D, p) = \alpha_n(D, q)$ , wobei man  $q$  dadurch erhält, dass man  $p$  um eine Kreuzung nach vorn verschiebt. Folgenden Fälle werden dazu unterschieden:

**A.i** die erste Kreuzung nach  $p$  involviert nur eine Komponente

**A.i.a** die erste Kreuzung nach  $p$  ist eine Unterkreuzung

**A.i.b** die erste Kreuzung nach  $p$  ist eine Überkreuzung

**A.ii** die erste Kreuzung nach  $p$  involviert zwei Komponenten

**A.i** DIE ERSTE KREUZUNG NACH  $p$  INVOLVIERT NUR EINE KOMPONENTE

**A.i.a** DIE ERSTE KREUZUNG NACH  $p$  IST EINE UNTERKREUZUNG



$\implies S_i$  in der Switch-Sequenz von  $D$  nach  $D^*(p)$  enthalten.



$\implies S_i$  ist nicht in der Switch-Sequenz von  $D$  nach  $D^*(q)$  enthalten.

ENTWEDER Die Standardsequenz von  $q$  aus ist nichtleer ( $D \neq D^*(q)$ )

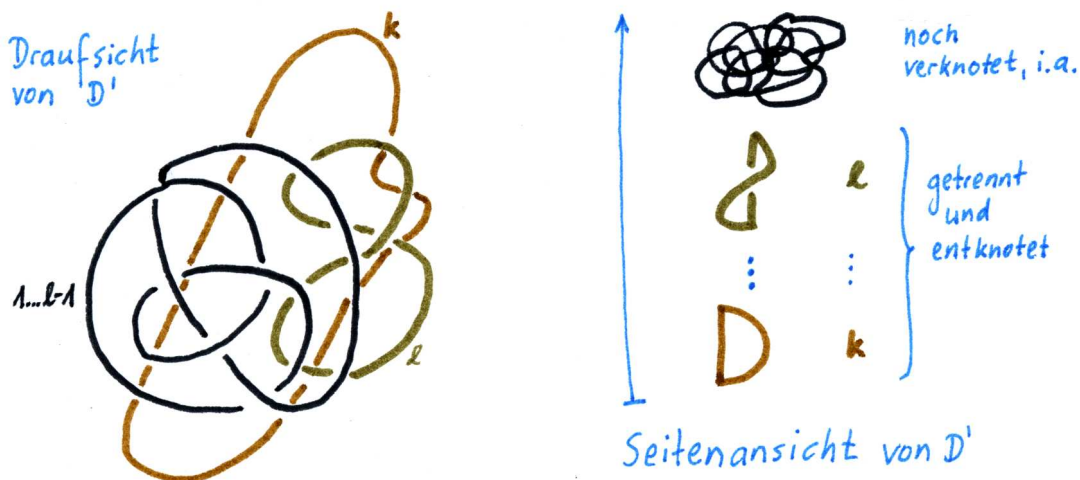
$S_m, \dots, S_1$  sei Standardsequenz von  $D$  in Bezug auf  $p$ , d.h.  $S_m \dots S_1(D) = D^*(p)$ .

$\implies S_m \dots \hat{S}_i \dots S_1(D) = D^*(q)$

$$\begin{aligned}
 \implies \alpha_n(D, p) - \alpha_n(D, q) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \left( \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{j=2}^m \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots S_1(D)) \right) \\
 &\quad - \left( \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{j=2}^m \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots \hat{S}_i \dots S_1(D)) \right) \\
 &= \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D))
 \end{aligned}$$

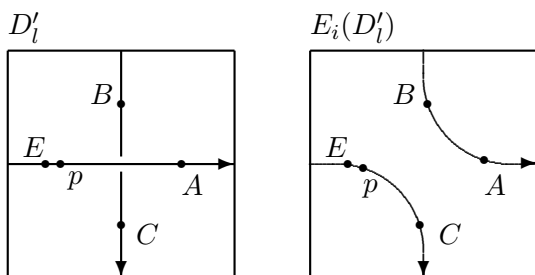
Wir müssen nun also  $E_i S_{i-1} \dots S_1(D) = E_i S_i S_{i-1} \dots S_1(D)$  näher untersuchen.

Aus der Definition der Standardsequenz für Links folgt, dass in  $D' = S_i S_{i-1} \dots S_1(D)$  die Komponenten  $l$  bis  $k$  bereits entknotet und vom Rest des Links getrennt sind.

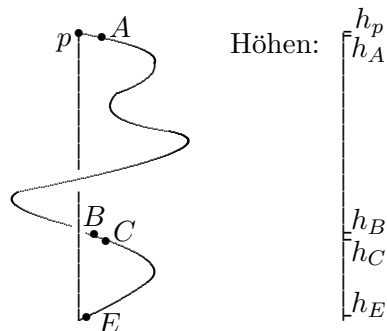


$E_i$  auf  $D'$  angewandt hat demnach nur Einfluss auf die  $l$ -te Komponente. Wir betrachten nun also nur die  $l$ -te Komponente  $D'_l$  von  $D'$ :

Diagramm-Ausschnitte (Draufsicht):



Seitensicht vom Knoten zu  $D'_l$ :



Im zu  $E_i(D'_l)$  gehörigen Knoten ...

...liegt das Kurvenstück  $\widehat{AB}$  zwischen Höhe  $h_A$  und  $h_B$ .

...liegt das Kurvenstück  $\widehat{BA}$  liegt zwischen Höhe  $h_B$  und  $h_A$ .

...liegt das Kurvenstück  $\widehat{CE}$  liegt zwischen Höhe  $h_C$  und  $h_E$ .

...umfasst das Kurvenstück  $\widehat{EC}$  die volle Höhe (Nase die nach oben ragt).

Man kann  $\widehat{DC}$  aber „nach unten drücken“, d.h. in den Höhenbereich zwischen  $h_C$  und  $h_D$ . Im Diagrammausschnitt von  $E_i(D'_l)$  sieht man, dass der Bogen  $\widehat{DC}$  keine Kreuzung hat, also auf jeder Höhenstufe liegen kann, mit  $h_D$  am Anfangspunkt und  $h_C$  am Endpunkt.

Damit besteht  $E_i(D'_l)$  aus zwei entknoteten, getrennt liegenden Komponenten.

$\implies \alpha_{n-1}(E_i D') = 0$  nach Induktionsannahme [Split]

$\implies \alpha_n(D, p) = \alpha_n(D, q)$

ODER Die Standardsequenz von  $q$  aus ist leer ( $D = D^*(q)$ )

$$\implies \alpha_n(D, q) - \alpha_n(D, p) \stackrel{Def.}{=} 0 - \epsilon_1(D)\alpha_{n-1}(E_1(D))$$

denn  $S_1$  ist die Standardsequenz für  $D$  von  $p$  aus, und für  $D$  von  $q$  aus gibt es keine Standardsequenz.

$\alpha_{n-1}(E_1(D)) = 0$  wegen Induktionsvoraussetzung [Split], weil  $E_1(D)$  getrennt ist (gleiche Argumentation wie gerade eben).

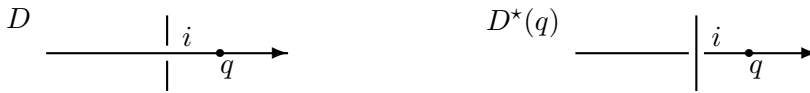
$$\implies \alpha_n(D, q) - \alpha_n(D, p) = 0$$

$$\implies \alpha_n(D, q) = \alpha_n(D, p)$$

**A.i.b** DIE ERSTE KREUZUNG NACH  $p$  IST EINE ÜBERKREUZUNG



$\implies S_i$  ist nicht in der Standardsequenz von  $D$  nach  $D^*(p)$  enthalten.



$\implies S_i$  ist in der Standardsequenz von  $D$  nach  $D^*(q)$  enthalten.

$S_m, \dots, S_1$  sei Standardsequenz von  $D$  in Bezug auf  $q$ , d.h.  $S_m \dots S_1(D) = D^*(q)$ .

ENTWEDER Die Standardsequenz von  $p$  aus ist leer ( $D = D^*(p)$ )

$$\implies \alpha_n(D, q) - \alpha_n(D, p) \stackrel{Def.}{=} \epsilon_1(D)\alpha_{n-1}(E_1(D)) - 0$$

denn  $S_1$  ist die Standardsequenz für  $D$  von  $q$  aus, und für  $D$  von  $p$  aus gibt es keine Standardsequenz.

$\alpha_{n-1}(E_1(D)) = 0$  wegen Induktionsvoraussetzung [Split], weil  $E_1(D)$  getrennt ist

$$\implies \alpha_n(D, q) - \alpha_n(D, p) = 0$$

$$\implies \alpha_n(D, q) = \alpha_n(D, p)$$

ODER Die Standardsequenz von  $p$  aus ist nichtleer ( $D \neq D^*(p)$ )

$\implies S_m \dots \hat{S}_i \dots S_1(D)$  ist die Standardsequenz von  $D$  von  $p$  aus.

Es gilt  $S_m \dots \hat{S}_i \dots S_1(D) = D^*(p)$ .

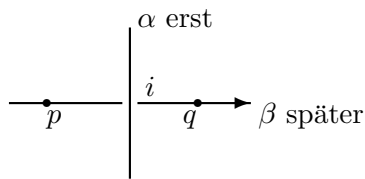
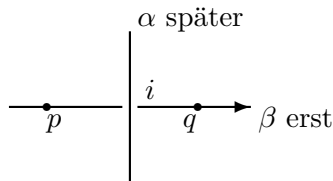
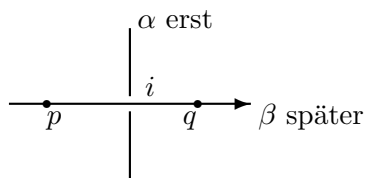
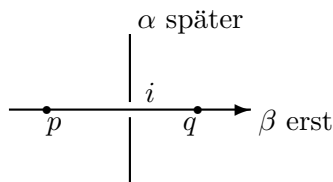


$$\begin{aligned}
&\implies \alpha_n(D, q) - \alpha_n(D, p) \\
&\stackrel{\text{Def.}}{=} \left( \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{j=2}^m \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(\underbrace{E_j S_{j-1} \dots S_1(D)}_{=: X_j}) \right) - \left( \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{j=2, j \neq i}^m \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(\underbrace{E_j S_{j-1} \dots S_1(D)}_{=: S_i(X_j)}) \right) \\
&\stackrel{\text{kürzen}}{=} \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(X_i) + \sum_{j=i+1}^m \epsilon_j(D) \cdot \left( \alpha_{n-1}(X_j) - \alpha_{n-1}(S_i(X_j)) \right) \\
&\stackrel{\text{Ind. ann [Skein]}}{=} \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(X_i) + \sum_{j=i+1}^m \epsilon_j(D) \cdot \left( \underbrace{\epsilon_i(X_j)}_{=-\epsilon_i(D)} \alpha_{n-2}(E_i(X_j)) \right) \\
&\stackrel{\text{rausziehen}}{=} \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(X_i) - \epsilon_i(D) \sum_{j=i+1}^m \epsilon_j(D) \cdot \left( \alpha_{n-2}(E_i(X_j)) \right) \\
&\stackrel{\text{Ruecksbst.}}{=} \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(X_i) - \epsilon_i(D) \sum_{j=i+1}^m \epsilon_j(D) \cdot \left( \alpha_{n-2}(E_i E_j S_{j-1} \dots S_1(D)) \right) \\
&\stackrel{\text{kommutieren}}{=} \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(X_i) - \epsilon_i(D) \left( \epsilon_{i+1}(D) \cdot \left( \alpha_{n-2}(\underbrace{E_{i+1} E_i S_{i-1} \dots S_1(D)}_{X_i}) \right) + \sum_{j=i+2}^m \epsilon_j(D) \cdot \left( \alpha_{n-2}(E_j S_{j-1} \dots S_{i+1} E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \right) \right) \\
&= \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(X_i) - \epsilon_i(D) \left( \epsilon_{i+1}(X_i) \cdot \alpha_{n-2}(E_{i+1}(X_i)) + \sum_{j=i+2}^m \epsilon_j(S_{j-1} \dots S_{i+1}(X_i)) \cdot \left( \alpha_{n-2}(E_j S_{j-1} \dots S_{i+1}(X_i)) \right) \right) \\
&\stackrel{\text{Ind. ann [Skein]}}{=} \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(X_i) - \epsilon_i(D) \left( \left( \alpha_{n-1}(X_i) - \alpha_{n-1}(S_{i+1} X_i) \right) + \sum_{j=i+2}^m \left( \alpha_{n-1}(S_{j-1} \dots S_{i+1}(X_i)) - \alpha_{n-1}(S_j S_{j-1} \dots S_{i+1}(X_i)) \right) \right) \\
&\stackrel{\text{kürzen}}{=} \epsilon_i(D) \alpha_{n-1}(\underbrace{S_m S_{m-1} \dots S_{i+1}(X_i)}_{=: E_i(D^*(p))}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Denn die  $i$ -te Kreuzung liegt direkt hinter dem Basispunkt. Deshalb ist die gleiche Betrachtung wie für die  $i$ -te Kreuzung im Fall A.i.a gültig.

**A.ii**DIE ERSTE KREUZUNG NACH  $p$  INVOLVIERT ZWEI KOMPONENTE

Mögliche Fälle:

Die Kreuzung  $i$  ist weder in der Sequenz von  $\alpha$  noch von  $\beta$ .Die Kreuzung  $i$  ist in der Sequenz von  $\beta$ , sowohl von  $p$  als auch von  $q$  aus.Die Kreuzung  $i$  ist in der Sequenz von  $\alpha$ .Die Kreuzung  $i$  ist weder in der Sequenz von  $\alpha$  noch von  $\beta$ .

In dem Fall, dass die Kreuzung  $i$  an dem  $\beta$ -Beitrag zur Standardsequenz beteiligt ist, ist die Standardsequenz mit  $p$  als einem der Basispunkte von der Form:

$$\dots? \dots \underbrace{S_i \dots S_1}_{\text{Komponente } \beta} \dots? \dots$$

Und die Standardsequenz mit  $q$  als einem der Basispunkte von der Form:

$$\dots? \dots \underbrace{S_{i-1} \dots S_1 S_i}_{\text{Komponente } \beta} \dots? \dots$$

Es genügt zu zeigen, dass  $\alpha_n$  sich durch permutieren innerhalb der Standardsequenz nicht ändert.

Dazu genügt es wiederum zu zeigen, dass  $\alpha_n$  sich durch Basistranspositionen innerhalb der Standardsequenz nicht ändert.

*Beweis:*

$$\alpha_n(D, \dots S_{j+1} S_j \dots) - \alpha_n(D, \dots S_j S_{j+1} \dots)$$

$$\begin{aligned} &= \left( \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{i=2}^{j-1} \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) + \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots S_1(D)) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_{j+1}(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_{j+1} S_j \dots S_1(D)) + \sum_{i=j+2}^m \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \right) \\ &\quad - \left( \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{i=2}^{j-1} \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_{j+1}(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_{j+1} S_{j-1} \dots S_1(D)) + \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_j S_{j+1} S_{j-1} \dots S_1(D)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=j+2}^m \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \right) \end{aligned}$$

wegen der Definition

$$\begin{aligned} &= \left( \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots S_1(D)) + \epsilon_{j+1}(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_{j+1} S_j \dots S_1(D)) \right) \\ &\quad - \left( \epsilon_{j+1}(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_{j+1} S_{j-1} \dots S_1(D)) + \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_j S_{j+1} S_{j-1} \dots S_1(D)) \right) \end{aligned}$$

durch zusammenfassen

$$\begin{aligned} &= \left( \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(X_j) + \epsilon_{j+1}(D) \cdot \alpha_{n-1}(X_{j+1}) \right) \\ &\quad - \left( \epsilon_{j+1}(D) \cdot \alpha_{n-1}(S_j X_{j+1}) + \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(S_{j+1} X_j) \right) \end{aligned}$$

durch substituieren

$$= \epsilon_j(D) \cdot \left( \alpha_{n-1}(X_j) - \alpha_{n-1}(S_{j+1} X_j) \right) + \epsilon_{j+1}(D) \cdot \left( \alpha_{n-1}(X_{j+1}) - \alpha_{n-1}(S_j X_{j+1}) \right)$$

durch umsortieren

$$= \epsilon_j(D) \cdot \left( \underbrace{\epsilon_{j+1}(X_j)}_{=\epsilon_{j+1}(D)} \cdot \alpha_{n-2}(E_{j+1} X_j) \right) + \epsilon_{j+1}(D) \cdot \left( \underbrace{\epsilon_j(X_{j+1})}_{=-\epsilon_j(D)} \cdot \alpha_{n-2}(E_j X_{j+1}) \right)$$

wegen der Induktionsannahme [Skein]

$$= \epsilon_j(D) \cdot \epsilon_{j+1}(D) \left( \alpha_{n-2}(E_{j+1} X_j) - \alpha_{n-2}(E_j X_{j+1}) \right)$$

durch umsortieren

$$= \epsilon_j(D) \cdot \epsilon_{j+1}(D) \left( \alpha_{n-2}(E_{j+1} E_j S_{j-1} \dots S_1(D)) - \alpha_{n-2}(E_j E_{j+1} S_j \dots S_1(D)) \right)$$

durch rücksostituieren

$$= 0$$

**B Invarianz unter Reidemeisterbewegungen [Reide]**

## REIDEMEISTER 1+2

Nur eine Komponente bzw. erste Komponente überlappt die spätere Komponente

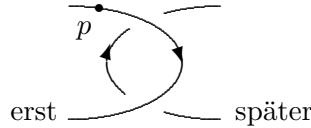
$$\alpha_n(D) = \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{i=2}^m \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \quad (1)$$

$$= \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(R^k E_1(D)) + \sum_{i=2}^m \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(R^k E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \quad (2)$$

$$= \epsilon_1(R^k D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(R^k D)) + \sum_{i=2}^m \epsilon_i(R^k D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(R^k D)) \quad (3)$$

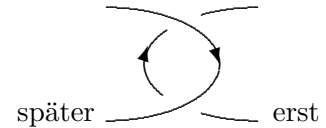
$$= \alpha_n(R^k D) \quad (4)$$

- (1) ich kann einen Basispunkt in  $D$  so wählen (benutze hier [UnBas] für  $n$ ), dass die Reidemeisterbewegung die Switch-Sequenz nicht ändert, d.h.  $D$  und  $R(D)$  haben die gleiche Switch-Sequenz; in Bezug auf diese Standardsequenz nehme ich die Definition von  $\alpha_n$



- (2) Für Reidemeisterbewegung 1 und 2 (also  $k = 1, 2$ ) ist  $\alpha_{n-1}$  invariant unter Reidemeisterbewegungen, nach Induktionsannahme [Reide].
- (3) Nach Wahl der Standardsequenz beziehen sich die Reidemeisterbewegungen auf andere Kreuzungen als die Operatoren der Standardsequenz, deshalb kommutieren sie.
- (4) Nach Definition von  $\alpha_n$ , und nach Wahl der Switch-Sequenz.

Erste Komponente liegt unter späterer Komponente



$$\begin{aligned} \alpha_n(D) &= \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(R^k E_1(D)) + \sum_{i=2}^{j-1} \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(R^k E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \\ &\quad + \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(R^k E_j S_{j-1} \dots S_1(D)) + \epsilon_{j+1}(D) \cdot \alpha_{n-1}(R^k E_{j+1} S_j \dots S_1(D)) \end{aligned}$$



$$+ \sum_{i=j+2}^m \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(R^k E_i S_{i-1} \dots S_1(D))$$

$$= \epsilon_1(R^k D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(R^k D)) + \sum_{i=2}^{j-1} \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(R^k D))$$

$$+ \sum_{i=j+2}^m \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots \hat{S}_{j+1} \hat{S}_j \dots S_1(R^k D))$$

$$= \alpha_n(R^k D)$$

REIDEMEISTER 3

Wir zeigen im Folgenden nur den Fall, dass die drei beteiligten Stränge von der Komponente stammen. Die anderen Fälle erreicht man durch Fallunterscheidung, und bleibt dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

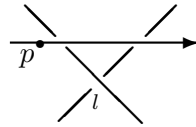
$$\alpha_n(R^3 D) = \epsilon_1(R^3 D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(R^3 D)) + \sum_{i=2}^m \epsilon_i(R^3 D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(R^3 D)) \quad (5)$$

$$= \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(\tilde{R}E_1(D)) + \sum_{i=2}^m \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(\tilde{R}E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \quad (6)$$

$$= \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{i=2}^m \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \quad (7)$$

$$= \alpha_n(D) \quad (8)$$

(5) Nach Definition von  $\alpha_n$  mit der Wahl des Basispunktes  $p$  wie folgt:



(6)  $l$  ist bei der Reidemeisterbewegung 3 die entscheidende Kreuzung, d.h. wir müssen berücksichtigen, dass  $S_l$  in der Standardsequenz liegen kann.

Falls nicht, dann ist sofort  $E_i S_{i-1} \dots S_1(R^3 D) = R^3 E_i S_{i-1} \dots S_1(D)$ .

Andernfalls kann man unterscheiden:

$$E_i S_{i-1} \dots S_1(R^3 D) = \left\{ \begin{array}{ll} R^3 E_i S_{i-1} \dots S_1(D) & : l < i \\ \left\{ \begin{array}{l} E_i S_{i-1} \dots S_1(D) \quad : \text{Fall a)} \\ R^2 R^2 E_i S_{i-1} \dots S_1(D) \quad : \text{Fall b)} \end{array} \right\} & : l = i \\ \begin{array}{ll} \text{b)} \quad \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} \cup & \cup \\ \cap & \cap \end{array} \end{array} & \text{a)} \quad \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} \cup & \cup \\ \cap & \cap \end{array} \end{array} \end{array} & \\ R^3 E_i S_{i-1} \dots S_1(D) & : l > i \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \end{array} \right. \end{array}$$

(7)  $\alpha_{n-1}$  ist invariant unter Reidemeisterbewegungen, nach Induktionsannahme [Reide], insbesondere für  $\tilde{R} \in \{R^2 R^2, R^3, \text{keine}\}$ .

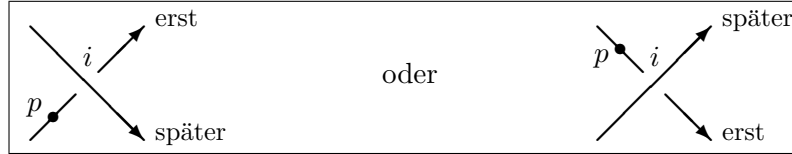
(8) nach Definition

### C Skein-Relation [Skein]

Gegeben sei eine Kreuzung  $i$  in einem Diagramm  $D$ .

Zu zeigen ist  $\epsilon_i(D)(\alpha_n(D) - \alpha_n(S_i(D))) = \alpha_{n-1}(E_i(D))$ .

1. FALL: DAS DIAGRAMM  $D$  HAT AN DER KREUZUNG  $i$  DIE FORM:



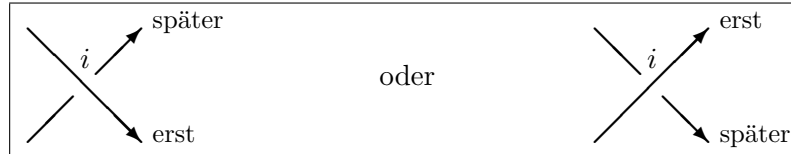
Dann kann man eine Standardsequenz  $S_m \dots S_1$  für das Diagramm  $D$  finden, die  $i$  involviert. Dazu wähle den Basispunkt  $p$  auf dem unterkreuzenden Strang, bevor man auf die Kreuzung  $i$  trifft. Hier fließt ein, dass [UnBas] bereits für  $n$  bewiesen ist.

$$\alpha_n(D) - \alpha_n(S_i(D))$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{Def.}}{=} \left( \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{j=2}^m \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots S_1(D)) \right) \\
&\quad - \left( \underbrace{\epsilon_1(S_i(D))}_{\epsilon_1(D)} \cdot \alpha_{n-1}(E_1(S_i(D))) + \sum_{j=2, j \neq i}^m \underbrace{\epsilon_j(S_i(D))}_{\epsilon_j(D)} \cdot \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots \hat{S}_i \dots S_1(S_i(D))) \right) \\
&= \left( \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_1(D)) + \sum_{j=2}^m \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots S_1(D)) \right) \\
&\quad - \left( \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-1}(S_i E_1(D)) + \sum_{j=2}^{i-1} \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots S_1(S_i(D))) \right. \\
&\quad \quad \left. + \sum_{j=i+1}^m \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots \hat{S}_i \dots S_1(S_i(D))) \right) \\
&= \epsilon_1(D) \cdot \left( \alpha_{n-1}(E_1(D)) - \alpha_{n-1}(S_i E_1(D)) \right) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{i-1} \epsilon_j(D) \cdot \left( \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots S_1(D)) - \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots S_1(S_i(D))) \right) \\
&\quad + \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \\
&\quad + \sum_{j=i+1}^m \epsilon_j(D) \cdot \left( \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots S_1(D)) - \alpha_{n-1}(E_j S_{j-1} \dots \hat{S}_i \dots S_1(S_i(D))) \right) \\
&\stackrel{\text{I. Ann [Skein]}}{=} \epsilon_1(D) \cdot \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-2}(E_i E_1(D)) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{i-1} \epsilon_j(D) \cdot \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-2}(E_i E_j S_{j-1} \dots S_1(D)) \\
&\quad + \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_i(D) \cdot \left( \epsilon_1(D) \cdot \alpha_{n-2}(E_1(E_i D)) + \sum_{j=2}^{i-1} \epsilon_j(D) \cdot \alpha_{n-2}(E_j S_{j-1} \dots S_1(E_i D)) \right) \\
&\quad + \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \\
&= \epsilon_i(D) \cdot \left( \epsilon_1(E_i(D)) \cdot \alpha_{n-2}(E_1(E_i D)) + \sum_{j=2}^{i-1} \epsilon_j(S_{j-1} \dots S_1 E_i(D)) \cdot \alpha_{n-2}(E_j S_{j-1} \dots S_1(E_i D)) \right) \\
&\quad + \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \\
&\stackrel{\text{I. Ann [Skein]}}{=} \epsilon_i(D) \cdot \left( \left( \alpha_{n-1}(E_i D) - \alpha_{n-1}(S_1(E_i D)) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=2}^{i-1} \left( \alpha_{n-1}(S_{j-1} \dots S_1(E_i D)) - \alpha_{n-1}(S_j S_{j-1} \dots S_1(E_i D)) \right) \right) \\
&\quad + \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \\
&\stackrel{\text{Teleskop}}{=} \epsilon_i(D) \cdot \left( \alpha_{n-1}(E_i D) - \alpha_{n-1}(E_i S_i S_{i-1} S_{i-2} \dots S_1(D)) \right) \\
&\quad + \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D)) \\
&= \epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i D) \qquad \square
\end{aligned}$$

2. FALL: DAS DIAGRAMM  $D$  HAT AN DER KREUZUNG  $i$  DIE FORM:



Also sieht das Diagramm  $S_i(D)$  folgendermaßen aus:



$S_i(D)$  erfüllt die Voraussetzungen des ersten Falls. Damit gilt die folgende Relation:

$$\alpha_n(S_i D) - \alpha_n(S_i(S_i D)) = \epsilon_i(S_i D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i(S_i D))$$

$$\implies \alpha_n(S_i D) - \alpha_n(D) = -\epsilon_i(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_i D) \qquad \square$$

## D Split-Link [Split]

Zu zeigen ist  $\alpha_n(\text{Split-Link}) = 0$ . Sei  $D$  in zwei getrennten Teilen. Dann lege  $D$  in disjunkte Umgebungen mit Reidemeister, denn  $\alpha_n$  ist darunter invariant ([Reide] für  $n$  bereits bewiesen).

1. FALL — wählen Basispunkte so, dass die Standardsequenz leer ist.  
Dann ist  $\alpha_n(D) = 0$  per Definition.

2. FALL — wählen Basispunkt so, dass eine Standardsequenz existiert.

Da zwei Teile in disjunkten Umgebungen liegen, betrifft die Standardsequenz keine Kreuzungen zwischen diesen beiden Teilen. Dann können sich die beiden Teile durch Operationen der Standardsequenz auch keinesfalls wieder verbinden. Dann gilt:

$$\alpha_n(D) = \epsilon_1(D) \cdot \underbrace{\alpha_{n-1}(E_1(D))}_{=0 \text{ Ind. Ann [Split]}} + \sum_{i=2}^m \epsilon_i(D) \cdot \underbrace{\alpha_{n-1}(E_i S_{i-1} \dots S_1(D))}_{=0 \text{ Ind. Ann [Split]}} = 0$$

## E Unknoten [Unknot]

Sei  $D$  der Unknoten. Mit Reidemeisterbewegungen (benutze [Reide] für  $n$ ), existiert ein Diagramm ohne Überkreuzungen. Deshalb ist die Standardsequenz leer. Nach Definition  $\alpha_n(\text{Unknoten}) = 0$ .

## F Unabhängigkeit von Reihenfolge der Komponenten [UnKomp]

Sei  $S_{k_m} \dots S_{k_1}$  die Standardsequenz zu einer festen Reihenfolge der Komponenten. Ändert man diese Reihenfolge, so erhält man eine neue Standardsequenz  $S'_{\kappa_\mu} \dots S'_{\kappa_1}$ .

Zu zeigen ist nun, dass  $\alpha_n$  unabhängig ist von der Wahl der Reihenfolge der Komponente des Links, d.h.

$$\alpha_n^{S_{k_m} \dots S_{k_1}}(D) = \epsilon_{k_1}(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_{k_1}(D)) + \sum_{i=2}^m \epsilon_{k_i}(D) \cdot \alpha_{n-1}(E_{k_i} S_{k_{i-1}} \dots S_{k_1}(D))$$

ist gleich

$$\alpha_n^{S'_{\kappa_\mu} \dots S'_{\kappa_1}}(D) = \epsilon_{\kappa_1}(D) \cdot \alpha_{n-1}(E'_{\kappa_1}(D)) + \sum_{j=2}^{\mu} \epsilon_{\kappa_j}(D) \cdot \alpha_{n-1}(E'_{\kappa_j} S'_{\kappa_{j-1}} \dots S'_{\kappa_1}(D)).$$

Nach Induktionsannahme ist  $\alpha_{n-1}$  wohldefiniert.

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \alpha_n^{S_{k_m} \dots S_{k_1}}(D) &\stackrel{[\text{Skein}]}{=} \epsilon_{\kappa_1}(D) \alpha_{n-1}(E'_{\kappa_1}(D)) + \alpha_n^{S_{k_m} \dots S_{k_1}}(S'_{\kappa_1}(D)) \\ &\stackrel{[\text{Skein}]}{=} \epsilon_{\kappa_1}(D) \alpha_{n-1}(E'_{\kappa_1}(D)) + \epsilon_{\kappa_2}(D) \alpha_{n-1}(E'_{\kappa_2} S'_{\kappa_1}(D)) + \alpha_n^{S_{k_m} \dots S_{k_1}}(S'_{\kappa_2} S'_{\kappa_1}(D)) \\ &\quad \vdots \\ &\stackrel{[\text{Skein}]}{=} \epsilon_{\kappa_1}(D) \alpha_{n-1}(E'_{\kappa_1}(D)) + \sum_{i=2}^{\mu} \epsilon_{\kappa_i}(D) \alpha_{n-1}(E'_{\kappa_i} S'_{\kappa_{i-1}} \dots S'_{\kappa_1}(D)) \\ &\quad + \underbrace{\alpha_n^{S_{k_m} \dots S_{k_1}}(S'_{\kappa_\mu} \dots S'_{\kappa_1}(D))}_{=0 \text{ da } S'_{\kappa_\mu} \dots S'_{\kappa_1}(D) \text{ Diagramm eines Split-Link}} \\ &= \alpha_n^{S'_{\kappa_\mu} \dots S'_{\kappa_1}}(D) \end{aligned}$$

Wir benutzen also, dass [Skein] für  $n$  bereits gezeigt ist. □