Vorlesung über Elementargeometrie
D. Schüth, Sommersemester 2008
Heute zum Thema:

Sphärische Geometrie

Wer? Annette Huck

Wo? Fakultät für Mathematik
HU Berlin

Wann? 16. Juli 2008

Mitschreiben? Unmöglich! Wird online gestellt.

Sphärische Geometrie ist ...

... Geometrie auf der Kugeloberfläche (= Sphäre).

Diese Vorlesung soll Ihnen einen ersten Überblick über diese besondere Geometrie geben, und dabei

von den folgenden Fragen geleitet sein:

Fragestellungen der Vorlesung

1. Welche bemerkenswerten Punkte und Linien gibt es auf der Kugeloberfläche?
2. Welchen Abstand haben Punkte auf der Kugeloberfläche?
3. Was sind deshalb die Punkte mit gleichem Abstand zu einem Zentrum, d.h. Kreise auf der Kugeloberfläche?
4. Wie kann uns die Kugeloberfläche als Modell für eine neue nicht-euklidische Geometrie dienen?
5. Wie übertragen sich die bekannten n-Ecke auf die Kugeloberfläche? Und welche Eigenschaften haben sie?
6. Wie berechnet man unbekannte Stücken (d.h. Winkel und Längen) analog zur euklidischen Trigonometrie?

Motivation

Geometrie auf der Kugeloberfläche ...

... aus welchem Grund ist das interessant?

Motivation

Zunächst einmal ergeben sich die Problemstellungen der sphärischen Geometrie auf natürliche Weise in der

- Astronomie
- Geodäsie
- Nautik
- Kartographie.

Deshalb ist die sphärische Geometrie bereits seit der Antike Gegenstand mathematischer Forschung.

Motivation

Scriba und Schreiber in *5000 Jahre Geometrie* über die Antike:

„[...] Neben der ebenen Trigonometrie benötigt der Astronom aber auch die sphärische, stellt sich doch der gestirnte Himmel dem Beobachter in Gestalt einer Kugel dar, so dass die einfachste geometrische Figur das aus Großkreisbögen gebildete sphärische Dreieck ist. Eine erste Sammlung von Lehrsätzen aus diesem Bereich hatte um 100 v. Chr. Theodosios von Pitane angelegt."

Scriba, Schreiber: 5000 Jahre Geometrie, S.81

Motivation

Weiterhin schreiben sie:

„Das Interesse an der Astronomie war seit den ältesten Kulturen bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts eine der stärksten Triebfedern für die Beschäftigung mit Mathematik. [...]“

Scriba, Schreiber: 5000 Jahre Geometrie, S.253

Motivation

Zur Renaissance bemerken sie:

„Seit dem 15. Jahrhundert kommt aber die Rolle der Astronomie als Hilfswissenschaft für die sich entwickelnde Nautik und Geodäsie hinzu, die im Laufe von etwa 300 Jahren die Astrologie als ‚Motor‘ der Astronomie fast völlig ablösen werden. Astronomie ist aus mathematischer Sicht zunächst einmal die Geometrie der auf einer gedachten Kugel projizierten Bewegungsabläufe am Himmel. Daher ist es nicht verwunderlich, dass die sphärische Trigonometrie sich lange Zeit gleichrangig neben der ebenen Trigonometrie entwickelte (während sie doch kein Bestandteil heutiger mathematischer Schul- und Allgemeinbildung mehr ist).“

Scriba, Schreiber: 5000 Jahre Geometrie, S.253

Literaturempfehlung

Scriba, Schreiber
5000 Jahre Geometrie
Geschichte, Kulturen, Menschen

Springer Berlin Heidelberg
2. erw. Auflage, 2004

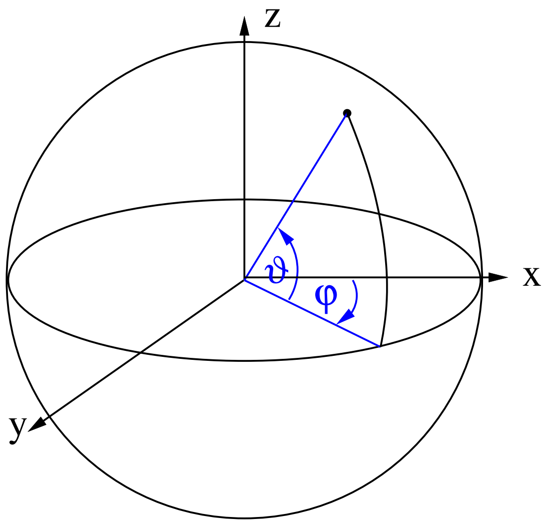
Insbesondere: Kapitel 5.2
Geometrie in Astronomie, Geodäsie und Kartographie

Notation

Wir betrachten ab jetzt stets:

$S^2 := \{A \in \mathbb{R}^3 \mid \|A\| = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$
d.h. Radius ist 1

Auf der Sphäre führen wir Kugelkoordinaten ein:



$x = \cos\varphi\cos\vartheta$
$y = \sin\varphi\cos\vartheta$
$z = \sin\vartheta$

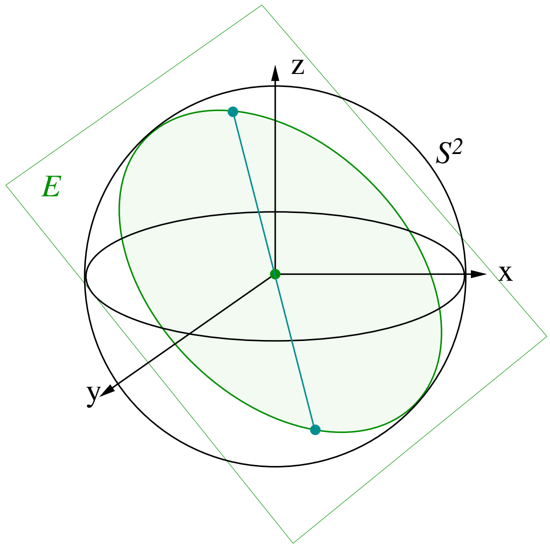
$-\pi \leq \varphi \leq \pi$
geographische Länge

$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$
geographische Breite

Notation

Großkreis := Schnittmenge der Sphäre S^2 und einer Ebene, die durch den Mittelpunkt 0 geht

also $\mathbf{S^2 \cap E}$

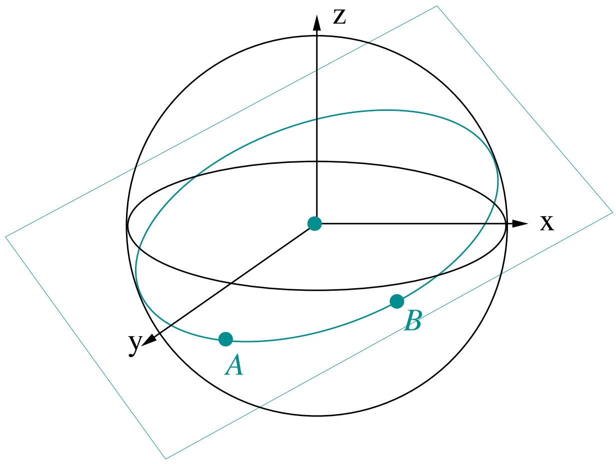


Antipodale Punkte := zwei Punkte auf S^2 deren Verbindungsstrecke durch den Mittelpunkt 0 geht

(heißen auch Antipodenpunkte oder diametrale Punkte)

Notation

Lemma: Durch je zwei nicht antipodal gegenüberliegende Punkte von S^2 verläuft genau ein Großkreis.



Denn: $A, B \in S^2$ seien nicht antipodal

$\Longrightarrow \quad A, B, 0$ nicht kollinear

$\Longrightarrow \quad$ ex. genau eine Ebene $E \; : \; A, B, 0 \in E$

und damit genau ein Großkreis $E \cap S^2 \; : \; A, B \in E \cap S^2$

Sphärischer Abstand

Welchen Abstand haben Punkte auf der Kugeloberfläche?

Definition des sphärischen Abstands

Definition des Abstands von zwei Punkten auf der Sphäre:

Seien $A, B \in S^2$ und $[a, b]$ Intervall.

$$\boxed{d_S(A,B) \; := \; \min \left\{ L(c) \;\middle|\; \begin{array}{l} c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \text{stetig differenzierbar,} \\ Bild[c] \subseteq S^2, \\ c(a) = A, \; c(b) = B \end{array} \right\}}$$

Wobei:

$$\begin{array}{rccc} L \; : & \mathcal{C}^1\left([a,b], \mathbb{R}^3\right) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & c & \longmapsto & \int_a^b \|c'(t)\| dt \end{array}$$

das aus der Vorlesung bereits bekannte Funktional für die Länge von Kurven ist.

Das heißt:

$d_S(A,B)$ **soll also als die Länge des kürzesten auf der Sphäre verlaufenden Weges von A nach B definiert sein.**

Berechnung des sphärischen Abstands

Es gilt: $L(c) \;\geq\; \measuredangle(A,B)$ $\qquad \forall c \in \mathcal{C}^1\left([a,b],\mathbb{R}^3\right)$

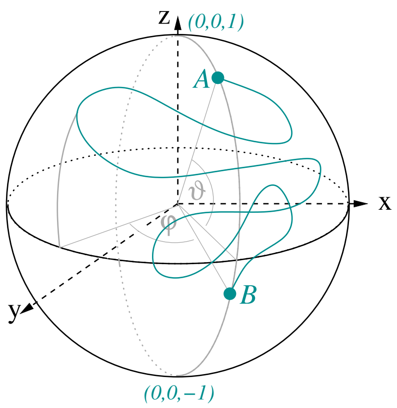
Denn: Da Winkel und Kurvenlängen auf der Sphäre invariant unter Drehung um den Nullpunkt sind, drehen wir oBdA so, dass A und B auf einem Meridian liegen.

Einleitung Sphär. Abstand Sphär. Kreise Elliptische Ebene Sphär. Zweiecke Sphär. Dreiecke Sphär. Trigonometrie

Berechnung des sphärischen Abstands

Es gilt: $L(c) \;\geq\; \measuredangle(A,B)$ $\qquad \forall c \in \mathcal{C}^1\left([a,b],\mathbb{R}^3\right)$

Denn:



$c(t)$ und $\measuredangle(A,B)$ in Kugelkoordinaten $\varphi(t)$ und $\vartheta(t)$ parametrisiert:

$$\measuredangle(A,B) \;=\; |\vartheta(b) - \vartheta(a)|$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t)\cos\vartheta(t) \\ \sin\varphi(t)\cos\vartheta(t) \\ \sin\vartheta(t) \end{pmatrix}$$

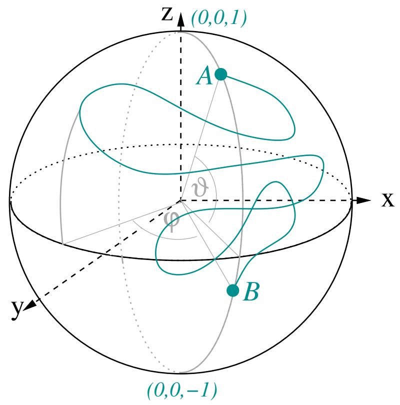
$$c'(t) = \vartheta'(t)\begin{pmatrix} -\cos\varphi(t)\sin\vartheta(t) \\ -\sin\varphi(t)\sin\vartheta(t) \\ \cos\vartheta(t) \end{pmatrix} + \varphi'(t)\cos\vartheta(t)\begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ orthogonale Einheitsvektoren $\uparrow$

Berechnung des sphärischen Abstands

Es gilt: $L(c) \geq \measuredangle(A,B)$ $\quad \forall c \in \mathcal{C}^1\left([a,b],\mathbb{R}^3\right)$

Denn:



$c(t)$ und $\measuredangle(A,B)$ in Kugelkoordinaten $\varphi(t)$ und $\vartheta(t)$ parametrisiert:

$$\measuredangle(A,B) = |\vartheta(b) - \vartheta(a)|$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t)\cos\vartheta(t) \\ \sin\varphi(t)\cos\vartheta(t) \\ \sin\vartheta(t) \end{pmatrix}$$

$$\|c'(t)\|^2 = \vartheta'(t)^2 + \varphi'(t)^2\cos\vartheta(t)^2 \geq \vartheta'(t)^2$$

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\|dt \geq \int_a^b |\vartheta'(t)|dt \geq |\int_a^b \vartheta'(t)dt|$$

$$= |\vartheta(b) - \vartheta(a)| = \measuredangle(A,B)$$

Einleitung Sphär. Abstand Sphär. Kreise Elliptische Ebene Sphär. Zweiecke Sphär. Dreiecke Sphär. Trigonometrie

Berechnung des sphärischen Abstands

Gleichheit? $L(c) = \measuredangle(A,B)$ $\quad \forall c \in \mathcal{C}^1\left([a,b],\mathbb{R}^3\right)$

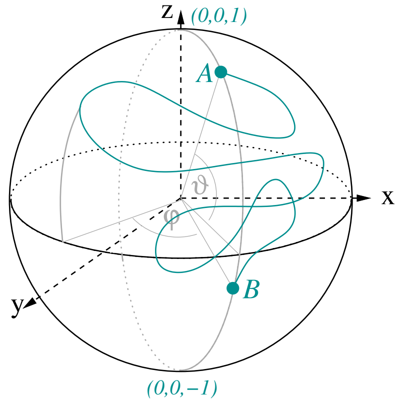
Nocheinmal die Abschätzung von eben:

$$\|c'(t)\|^2 = \vartheta'(t)^2 + \varphi'(t)^2\cos\vartheta(t)^2 \geq \vartheta'(t)^2$$

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\|dt \overset{(1.)}{\geq} \int_a^b |\vartheta'(t)|dt \overset{(2.)}{\geq} |\int_a^b \vartheta'(t)dt|$$

$$= |\vartheta(b) - \vartheta(a)| = \measuredangle(A,B)$$

Gleichheitsfall



$L(c) = \measuredangle(A,B) \Longleftrightarrow$

(1.) $\varphi'(t) \equiv 0$ <u>d. h.</u> c verläuft auf dem Großkreis

(2.) $\vartheta'(t)$ ohne Vorzeichenwechsel <u>d. h.</u> c verläuft monoton von A nach B

Berechnung des sphärischen Abstands

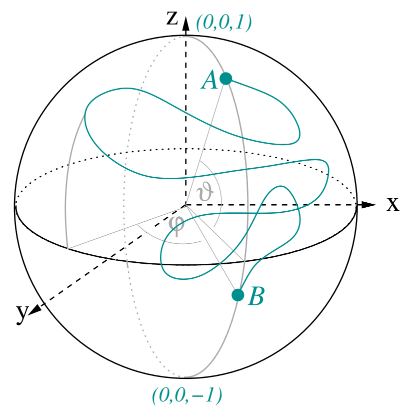
Gleichheit? $L(c) = \measuredangle(A,B) \qquad \forall c \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^3)$

Nocheinmal die Abschätzung von eben:

$$\|c'(t)\|^2 = \vartheta'(t)^2 + \varphi'(t)^2 \cos\vartheta(t)^2 \geq \vartheta'(t)^2$$

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\|dt \overset{(1.)}{\geq} \int_a^b |\vartheta'(t)|dt \overset{(2.)}{\geq} \left|\int_a^b \vartheta'(t)dt\right| = |\vartheta(b)-\vartheta(a)| = \measuredangle(A,B)$$

Gleichheitsfall



$L(c) = \measuredangle(A,B) \iff$

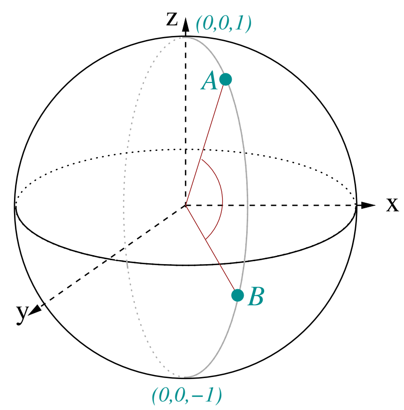
c verläuft monoton auf dem kürzeren Stück des Großkreisbogens

Einleitung Sphär. Abstand Sphär. Kreise Elliptische Ebene Sphär. Zweiecke Sphär. Dreiecke Sphär. Trigonometrie

Berechnung des sphärischen Abstands

Resultat $d_S(A,B) = \measuredangle(A,B)$

Der sphärische Abstand ist gerade der euklidische Winkel zwischen A und B vom Nullpunkt aus im Bogenmaß



Definition des Skalarprodukts:

$$\underbrace{\|A\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|B\|}_{=1} \cdot \cos\measuredangle(A,B) = \langle A|B\rangle$$

ergibt:

$$\boxed{d_S(A,B) = \measuredangle(A,B) = \arccos\langle A|B\rangle}$$

Eigenschaften des sphärischen Abstands

- Der sphärische Abstand ist invariant unter Drehung um 0 und unter Spiegelung an einer Ebene, die durch 0 geht
- (S^2, d_S) ist ein metrischer Raum

$$\begin{array}{lll} \text{(M1)} & d_S(A,B) > 0 & \forall A \neq B \\ \text{(M2)} & d_S(A,B) = d_S(B,A) & \forall A, B \\ \text{(M3)} & d_S(A,C) \leq d_S(A,B) + d_S(B,C) & \forall A, B, C \end{array}$$

[wegen Def. mittels Minimum]

- Der sphärische Abstand ist beschränkt, nämlich

$$d_S(A,B) \ \leq \ \pi$$

- $d_S(A,B) \ = \ \pi \quad \Longleftrightarrow \quad A, B$ liegen antipodal

Sphärische Kreise

Was sind die Punkte mit gleichem Abstand zu einem Zentrum, d.h. Kreise auf der Sphäre?

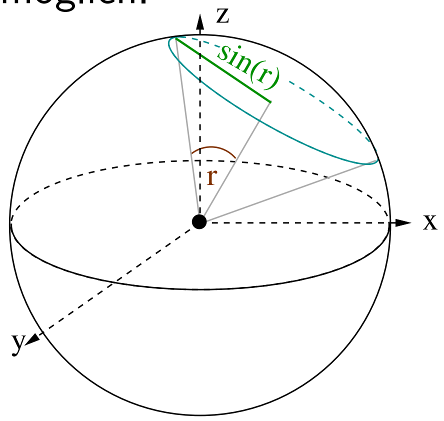
Sphärische Kreise

Ein Sphärischer Kreis ... ... mit Radius r und Mittelpunkt $M \in S^2$ sind alle Punkte auf S^2, die zu M den sphärischen Abstand r haben.

Als Radius ist nur $0 \leq r \leq \pi$ möglich.

Kreisumfang: $\boxed{\text{Umfang} \;=\; 2\pi \sin r}$

Denn der sphärische Kreis ist ein euklidischer Kreis mit Radius $\sin r$ und demnach Umfang $2\pi \sin r$

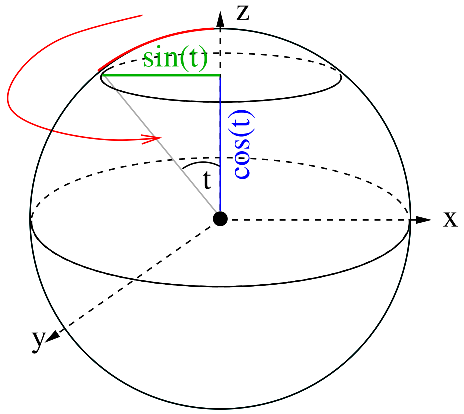


$\sin r < r \;\Rightarrow$ $$\text{Umfang}\begin{pmatrix}\text{sphär. Kreis}\\ \text{mit Radius } r\end{pmatrix} < \text{Umfang}\begin{pmatrix}\text{euklid. Kreis}\\ \text{mit Radius } r\end{pmatrix}$$

Sphärische Kreise

Kreisfläche: $\boxed{\text{Fläche} \;=\; 2\pi(1-\cos r) \;=\; 4\pi \sin^2\left(\frac{r}{2}\right)}$

$$\begin{aligned}
\text{Fläche} &= 2\pi \int_0^r |\sin t| \sqrt{(\sin' t)^2 + (\cos' t)^2}\, dt \\
&= 2\pi \int_0^r \sin t\, dt \\
&= 2\pi[-\cos t]_0^r \\
&= \mathbf{2\pi(1-\cos r)} \\
&= 2\pi\left(1-\left(\cos^2\left(\tfrac{r}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{r}{2}\right)\right)\right) \\
&= \mathbf{4\pi \sin^2\left(\tfrac{r}{2}\right)}
\end{aligned}$$



$2\pi(1-\cos r) < \pi r^2$

$$2\pi(1-\cos r) \overset{\text{Taylor}}{=} 2\pi\left(1 - 1 + \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{24} + \frac{r^6}{720} \mp \ldots\right)$$
$$= \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12} \pm \ldots \; < \; \pi r^2$$

Sphärische Kreise

Kreisfläche: $\boxed{\text{Fläche} \;=\; 2\pi(1-\cos r) \;=\; 4\pi \sin^2\left(\frac{r}{2}\right)}$

$$\text{Fläche} = 2\pi \int_0^r |\sin t| \sqrt{(\sin' t)^2 + (\cos' t)^2}\, dt$$

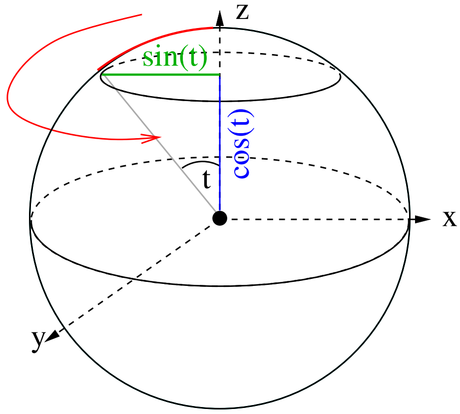
$$= 2\pi \int_0^r \sin t\, dt$$

$$= 2\pi[-\cos t]_0^r$$

$$= \mathbf{2\pi(1-\cos r)}$$

$$= 2\pi\left(1 - \left(\cos^2\left(\tfrac{r}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{r}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \mathbf{4\pi \sin^2\left(\tfrac{r}{2}\right)}$$



$2\pi(1-\cos r) < \pi r^2$

$$\Rightarrow \text{Fläche}\begin{pmatrix}\text{sphär. Kreis}\\ \text{mit Radius } r\end{pmatrix} < \text{Fläche}\begin{pmatrix}\text{euklid. Kreis}\\ \text{mit Radius } r\end{pmatrix}$$

Elliptische Ebene

Wie kann uns die Kugeloberfläche als Modell für eine neue nicht-euklidische Geometrie dienen?

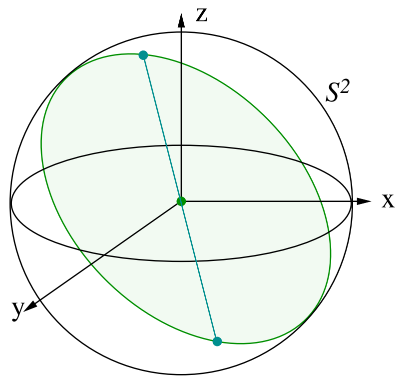
Ein Modell der elliptischen Ebene

Äquivalenzrelation: $A \sim B \quad :\Longleftrightarrow \quad A$ und B sind Antipodenpunkte

Elliptische Ebene := $S^2/\sim$ die Sphäre mit Identifizierung der Antipodenpunkte

Kanonische Projektion:

$$\begin{array}{cccc} \pi : & S^2 & \longrightarrow & S^2/\sim \\ & A & \longmapsto & [A] \end{array}$$

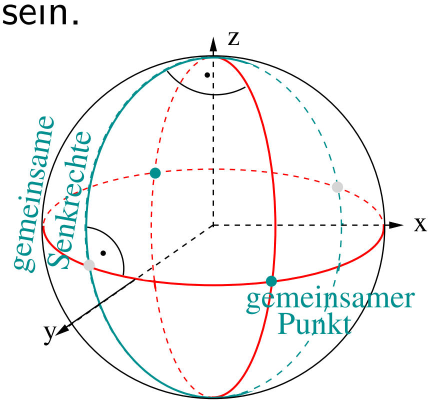


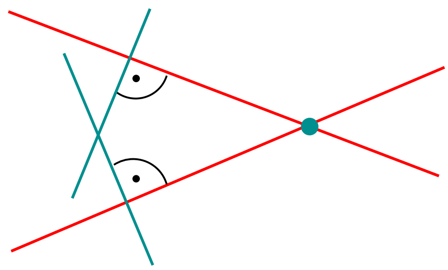
Punkte: $[A]$ die Äquivalenzklassen der Antipodenpunkte

Geraden: π[Großkreis] die Bilder der Großkreise

Elliptische Ebene vs. Euklidische Ebene

	Elliptische Ebene	Euklidische Ebene
Zwei Geraden schneiden sich:	... immer. Es gibt also keine Parallelen.	... manchmal aber nicht immer. Es gibt Parallelen.
Zwei Geraden die einen Punkt und eine Senkrechte gemeisam haben:	... können unterschiedlich sein.	... fallen zusammen.



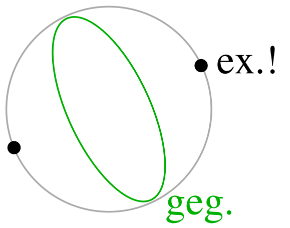


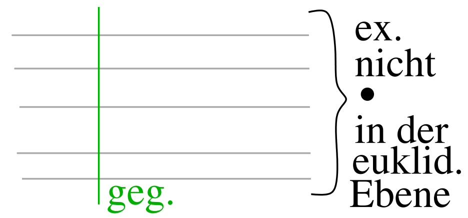
	Elliptische Ebene	Euklidische Ebene
Polardreiseitaxiom:	„Es gibt drei verschiedene Geraden, die paarweise senkrecht aufeinander stehen.“	Es gibt solche Geraden nicht. Das Polardreiseitaxiom gilt nicht.

Pol und Polare

Pol: $\forall G$ Gerade $\exists$ Pol — in der elliptischen Ebene

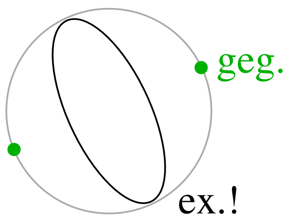
d.h. ein Punkt, wo sich alle Senkrechten zur Geraden schneiden

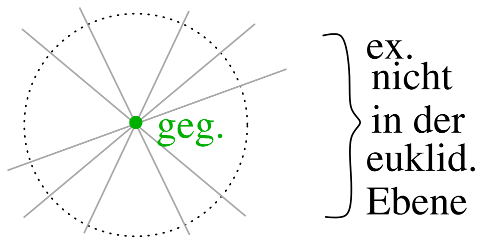




Polare: $\forall P$ Punkt $\exists$ Polare — in der elliptischen Ebene

d.h. eine Gerade, so dass P Pol der Geraden ist





Einleitung Sphär. Abstand Sphär. Kreise Elliptische Ebene Sphär. Zweiecke Sphär. Dreiecke Sphär. Trigonometrie

Dualität der elliptischen Ebene

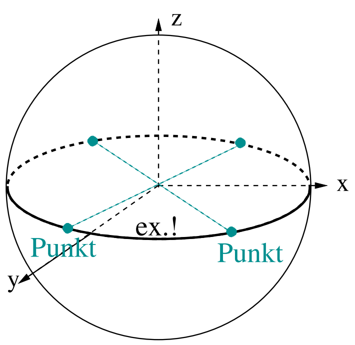
Elliptische Ebene: $S^2/\sim$ die Sphäre mit Identifizierung der Antipodenpunkte

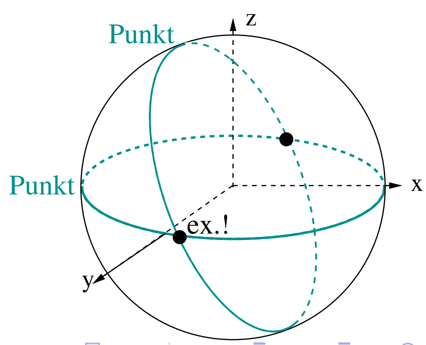
Punkte: π[Großkreis] die Bilder der Großkreise

Geraden: $[A]$ die Äquivalenzklassen der Antipodenpunkte

Dieses Modell: erfüllt ebenfalls die Axiome der elliptischen Ebene

Beispiel: Inzidenzaxiom: Zu zwei verschiedenen Punkten existiert genau eine Gerade, die mit den beiden Punkten inzidiert.





Axiomatik der elliptischen Ebene

- Inzidenzaxiome werden ergänzt um:
  „Zwei voneinander verschiedene Geraden haben stets genau einen Punkt gemeinsam.“
- Kein Parallelenaxiom.
- Lineare Anordnungsaxiome (Zwischenrelation) der euklidischen Ebene werden ersetzt durch diverse zyklische Anordnungsaxiome

Vergleich mit hyperbolischer Ebene:

Die hyperbolische Ebene erfüllt **alle Axiome** einer geometrischen Ebene, trotz unendlich vieler Parallelel zu G durch A

Die elliptische Ebene erfüllt ein **anderes Axiomensystem** als das der geometrischen Ebene.

Literaturempfehlung

Zum kurz Nachschlagen:

Dtv-Atlas der Mathematik, 1998, Deutscher Taschenbuchverlag, Seite 133-137

Lexikon der Mathematik, 2001, Spektrum Akademischer Verlag, Stichwort: Elliptische Geometrie

Unbekannterweise:

Filler: **Euklidische und nichteuklidische Geometrie**, 1993

Klotzek: **Geometrie**, 1971

Zum Weiterlesen:

Reid, Szendői: **Geometry and Topology**, 2005, Cambridge University Press

Kapitel *Spherical and hyperbolic non-Euclidean geometry*

Sphärische Zweiecke

Es gibt auf der Sphäre Zweiecke!

Einleitung Sphär. Abstand Sphär. Kreise Elliptische Ebene Sphär. Zweiecke Sphär. Dreiecke Sphär. Trigonometrie

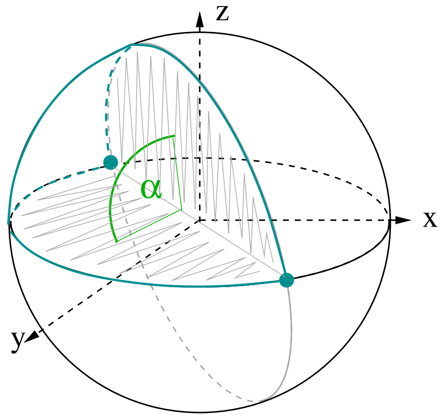
Sphärische Zweiecke

Sphärisches Zweieck := ist eine Fläche auf der Sphäre, die durch 2 verschiedene Punkte und zwei verschiedene Großkreisbögen (=Seiten) zwischen diesen beiden Punkten begrenzt ist.

Die Ecken eines Zweiecks liegen immer antipodal.

Denn nur dann existiert mehr als ein Großkreis, der beide Punkte enthält.

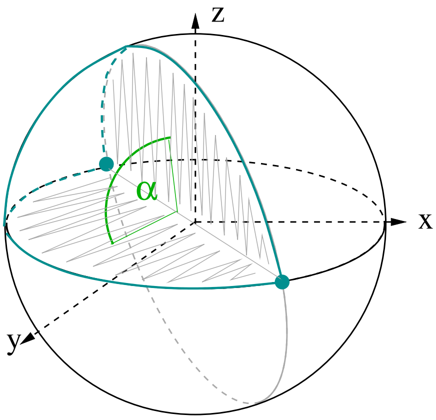
Winkel des Zweiecks:



Bis auf Isometrie ist ein Zweieck vollständig durch den Winkel zwischen den beiden Strecken bestimmt.

Sphärische Zweiecke

Winkel des Zweiecks:



Nenne $Z(\alpha)$ das Zweieck (bis auf Isomorphie) mit Winkel α.

$$\begin{aligned} &\text{Fläche}(Z(\alpha)) + \text{Fläche}(Z(\beta)) \\ &= \text{Fläche}(Z(\alpha+\beta)) \\ &\qquad \forall \alpha, \beta : \alpha + \beta \leq 2\pi \end{aligned}$$

d. h. $F(\alpha+\beta) = F(\alpha) + F(\beta)$

Fläche des Zweiecks:

$$\begin{aligned} F \ : \ [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \alpha &\longmapsto \text{Fläche}(Z(\alpha)) \end{aligned}$$ ist stetig und $\uparrow$

$\Longrightarrow$ ex. c Konstante : $F(\alpha) = c \cdot \alpha$

Weil $F(\pi) = \frac{\text{Fläche}(S^2)}{2} = 2\pi$ ist $\underline{\underline{c = 2}}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Fläche}(Z(\alpha)) = 2\alpha}$

Sphärische Dreiecke

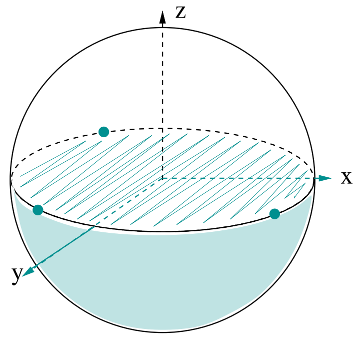
Was gilt für sphärische Dreiecke?

Sphärische Dreiecke

Sphärisches Dreieck := ist eine Fläche auf der Sphäre, die durch 3 verschiedene Punkte (die nicht auf einem Großkreis liegen) und drei verschiedene Seiten (= die jeweils kürzeren Großkreisbögen) zwischen diesen Punkten begrenzt ist.

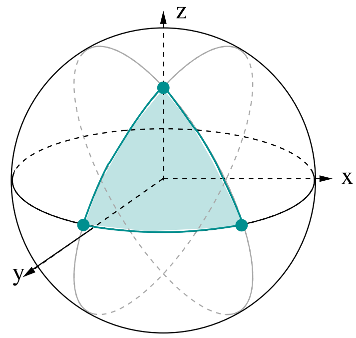
Auf einem sphärischen Dreieck liegen also insbesondere keine der Eckpunkte antipodal.

Skizzen:



← kein sphärisches Dreieck

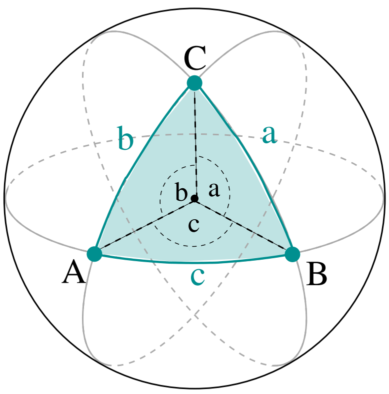
sphärisches Dreieck →



Seiten und Winkel im sphärischen Dreieck

Seiten: Länge der Seite $a \;:=\; d_S(B,C) \;=\; \sphericalangle(B,C)$

euklidischer Winkel vom Nullpunkt aus



Die Seitenlängen sind beschränkt: $0 < a, b, c < \pi$

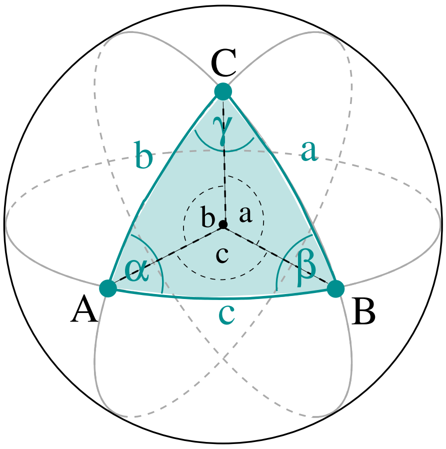
Es gilt die Dreiecksungleichung: $a + b > c$ usw.

Def. Skalarprodukt und Kreuzprodukt ergibt:

$$\cos(a) = \langle B|C\rangle \qquad \sin(a) = \|B \times C\|$$
$$\cos(b) = \langle C|A\rangle \qquad \sin(b) = \|C \times A\|$$
$$\cos(c) = \langle A|B\rangle \qquad \sin(c) = \|A \times B\|$$

Seiten und Winkel im sphärischen Dreieck

Innenwinkel:



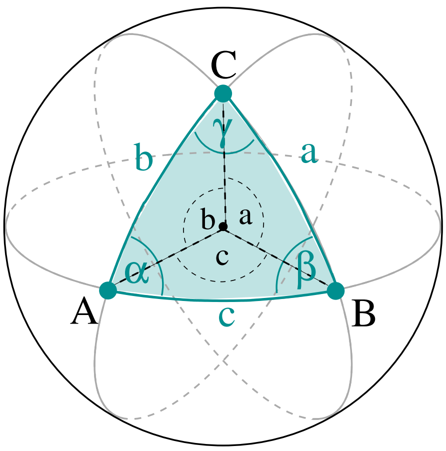
Innenwinkel zwischen Seite b und c ist:

$\alpha \;:=\; \sphericalangle(A \times B, A \times C)$

$=$ Winkel zwischen den Normalen der Großkreisebenen
$=$ Winkel zwischen den Großkreisebenen
$=$ Winkel zwischen den Tangenten
denn die Tangenten liegen in den jeweiligen Großkreisebenen und stehen senkrecht auf der Schnittgeraden der beiden Großkreisebenen

Seiten und Winkel im sphärischen Dreieck

Innenwinkel:



Innenwinkel zwischen Seite b und c ist:

$\alpha \;:=\; \sphericalangle(A \times B, A \times C)$

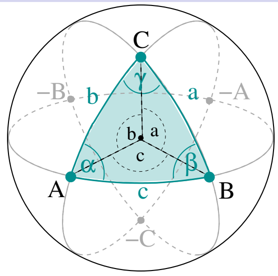
Def. Skalarprodukt und Kreuzprodukt ergibt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle A\times B | A\times C\rangle}{\|A\times B\|\cdot\|A\times C\|} \qquad \sin(\alpha) = \frac{\|(A\times B)\times(A\times C)\|}{\|A\times B\|\cdot\|A\times C\|}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\langle B\times C | B\times C\rangle}{\|B\times C\|\cdot\|B\times A\|} \qquad \sin(\beta) = \frac{\|(B\times C)\times(B\times A)\|}{\|B\times C\|\cdot\|B\times A\|}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle C\times A | C\times B\rangle}{\|C\times A\|\cdot\|C\times B\|} \qquad \sin(\gamma) = \frac{\|(C\times A)\times(C\times B)\|}{\|C\times A\|\cdot\|C\times B\|}$$

Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks



Flächeninhalt: $\boxed{\text{Fläche}(\triangle_{A,B,C}) \;=\; \alpha+\beta+\gamma-\pi}$

Denn:

$$\text{Fläche}(\triangle_{A,B,C}) + \text{Fläche}(\triangle_{-A,B,C}) = 2\alpha$$
$$\text{Fläche}(\triangle_{A,B,C}) + \text{Fläche}(\triangle_{A,-B,C}) = 2\beta$$
$$\text{Fläche}(\triangle_{A,B,C}) + \text{Fläche}(\triangle_{A,B,-C}) = 2\gamma \quad \text{(weil: Zweieckflächen)}$$

$$\text{Fläche}(\triangle_{A,B,C}) + \text{Fläche}(\triangle_{-A,B,C}) + \text{Fläche}(\triangle_{A,-B,C}) + \text{Fläche}(\triangle_{A,B,-C})$$
$$= \text{Fläche}(\triangle_{A,B,C}) + \text{Fläche}(\triangle_{-A,B,C}) + \text{Fläche}(\triangle_{-A,B,-C}) + \text{Fläche}(\triangle_{A,B,-C})$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{Fläche}(S^2) = 2\pi$$

Fläche der Halbsphäre, die den Großkreis durch A und C, sowie B enthält

$$\Longrightarrow \quad 2\alpha+2\beta+2\gamma-2\pi = 2\text{Fläche}(\triangle_{A,B,C})$$

Winkelsumme: $\pi < \alpha+\beta+\gamma$ weil $\text{Fläche}(\triangle_{A,B,C}) > 0$

Sphärische Trigonometrie

Wie berechnet man unbekannte Stücken (d.h. Winkel und Längen) analog zur euklidischen Trigonometrie?

Seitenkosinussatz

Es gilt: $\boxed{\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma}$

d. h. $\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$

d. h. die Seitenlängen bestimmen die Innenwinkel

Denn: $\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$

$$= \langle B|C\rangle \cdot \langle C|A\rangle + \|B \times C\| \cdot \|C \times A\| \cdot \frac{\langle C\times A|C\times B\rangle}{\|C\times A\|\cdot\|C\times B\|}$$

$$= \langle B|C\rangle \cdot \langle C|A\rangle + \langle C \times A|C \times B\rangle$$

$$\overset{Lagrange}{=} \langle B|C\rangle \cdot \langle C|A\rangle + \underbrace{\langle C|C\rangle}_{=1} \cdot \langle A|B\rangle - \underbrace{\langle A|C\rangle}_{=\langle C|A\rangle} \cdot \underbrace{\langle C|B\rangle}_{=\langle B|C\rangle}$$

$$= \langle A|B\rangle$$

Lagrange-Identität: $\langle \vec{v} \times \vec{w}|\vec{x} \times \vec{y}\rangle = \langle \vec{v}|\vec{x}\rangle \cdot \langle \vec{w}|\vec{y}\rangle - \langle \vec{w}|\vec{x}\rangle \cdot \langle \vec{v}|\vec{y}\rangle$
für den Beweise verwenden

Einleitung Sphär. Abstand Sphär. Kreise Elliptische Ebene Sphär. Zweiecke Sphär. Dreiecke Sphär. Trigonometrie

Sinussatz

Es gilt: $\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}}$

Denn: $\sin\alpha = \frac{\|(A\times B)\times(A\times C)\|}{\|A\times B\|\cdot\|A\times C\|} = \frac{\|\overbrace{(A\times B)}^{\vec{a}}\times(\overbrace{A}^{\vec{b}}\times\overbrace{C}^{\vec{c}})\|}{\sin c\cdot\sin b}$

$$\overset{\vec{b}\vec{a}\vec{c}-\vec{c}\vec{a}\vec{b}}{=} \frac{\left\|A\,\overbrace{\langle A\times B|C\rangle}^{=\text{Spatprodukt}} - C\,\overbrace{\langle A\times B|A\rangle}^{=0}\right\|}{\sin c\cdot\sin b} = \frac{\overbrace{\|A\|}^{=1}\,\overbrace{\|\langle A\times B|C\rangle\|}^{\text{Vol}[A,B,C]}}{\sin c\cdot\sin b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\text{Vol}[A,B,C]}{\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c}$$ symmetrisch in a, b, c

bac-cap-Regel: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,\langle\vec{a}|\vec{c}\rangle - \vec{c}\,\left\langle\vec{a}|\vec{b}\right\rangle$
Rechtsklammerung!

Merken: $\boxed{(A\times B)\times(A\times C) = \langle A\times B|C\rangle\cdot A}$

Winkelkosinussatz

Merken: $\boxed{(A \times B) \times (A \times C) \;=\; \langle A \times B | C \rangle \cdot A}$

Es gilt: $\boxed{\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a}$

d. h. $\quad \cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$

d. h. die Innenwinkel bestimmen die Seitenlängen !!!

Denn:

$$\cos c = \langle A|B\rangle = \left\langle \frac{\langle A\times B|C\rangle\cdot A}{|\langle A\times B|C\rangle|} \middle| \frac{\langle B\times C|A\rangle\cdot B}{|\langle B\times C|A\rangle|} \right\rangle$$

Denn $\langle A \times B|C\rangle = \langle B \times C|A\rangle$. Geteilt durch Betrag sind beide $+1$ oder beide -1. Außerdem $\langle A|B\rangle = \langle -A| - B\rangle$.

$$= \left\langle \frac{(A\times B)\times(A\times C)}{\|(A\times B)\times(A\times C)\|} \middle| \frac{(B\times C)\times(B\times A)}{\|(B\times C)\times(B\times A)\|} \right\rangle$$

$$= \frac{\Big\langle (A\times B)\times(A\times C) \Big| (B\times C)\times(B\times A) \Big\rangle}{\|(A\times B)\times(A\times C)\|\cdot\|(B\times C)\times(B\times A)\|}$$

$$= \frac{\langle A\times B|B\times C\rangle\cdot\langle A\times C|B\times A\rangle - \langle A\times C|B\times C\rangle\langle A\times B|B\times A\rangle}{\|(A\times B)\times(A\times C)\|\cdot\|(B\times C)\times(B\times A)\|}$$

$$= \Big[\ldots \, \text{Erweitern von Zähler und Nenner mit } \tfrac{1}{\|A\times B\|\cdot\|A\times C\|\cdot\|B\times C\|\cdot\|B\times A\|} \ldots\Big] = \frac{\cos\beta\cos\alpha + \cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

Sphärischer Pythogoras

Es gilt: $\gamma = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\cos c = \cos a \cdot \cos b}$

Folgt aus ... ... dem Seitenkosinussatz:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0}$$

Warum Pythagoras? Für kleine Winkel ist $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ eine gute Näherung des Kosinus.

Damit folgt aus dem sphärischen Pythogoras:

$$1 - \frac{c^2}{2} \approx \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) \approx 1 - \frac{a^2+b^2}{2}$$

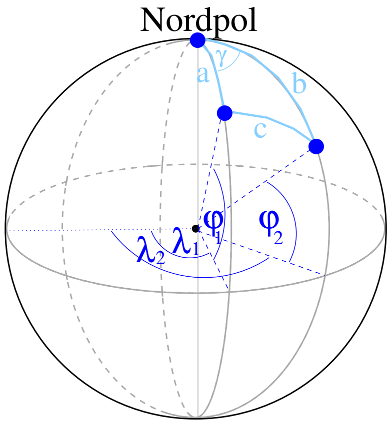
Also: $\boxed{c^2 \approx a^2 + b^2}$

D.h. für kleine Winkel folgt aus dem sphärischen Phythagoras näherungsweise der übliche euklidische Pythagoras.

Anwendung in der Geodäsie

Fragestellung: Bestimmen der Entfernung zwischen Berlin und Peking!

Geographische Daten:



Berlin: $\varphi_1 = 52°31'N$
$\lambda_1 = 13°25'O$

Peking: $\varphi_2 = 39°55'N$
$\lambda_2 = 116°23'O$

Seitenkosinussatz:

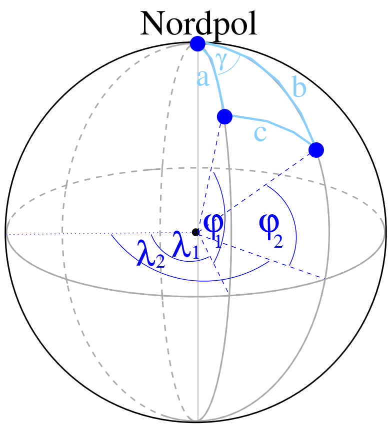
$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma \\ &= \cos(90°-\varphi_1)\cos(90°-\varphi_2)+\sin(90°-\varphi_1)\sin(90°-\varphi_2)\cos(\lambda_2-\lambda_1) \\ &\approx \cos(37{,}48°)\cos(50{,}08°)+\sin(37{,}48°)\sin(50{,}08°)\cos(102{,}97°) \\ &\approx 0,4045 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{c \approx 66,14°}}\end{aligned}$$

Einleitung Sphär. Abstand Sphär. Kreise Elliptische Ebene Sphär. Zweiecke Sphär. Dreiecke Sphär. Trigonometrie

Anwendung in der Geodäsie

Fragestellung: Bestimmen der Entfernung zwischen Berlin und Peking!

Geographische Daten:



Berlin: $\varphi_1 = 52°31'N$
$\lambda_1 = 13°25'O$

Peking: $\varphi_2 = 39°55'N$
$\lambda_2 = 116°23'O$

Seitenkosinussatz:

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma \\ \cos c &\approx 0,4045 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{c \approx 66,14°}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Entfernung(Berlin, Peking)} &= c_{\text{Bogenmaß}} \cdot R_{\text{Erde}} \\ &\approx 66,14° \cdot \tfrac{\pi}{180°} \cdot 6371,11km \approx \underline{7354km}\end{aligned}$$

THE END

Diese Notizen werden auf
`mathematik.hu-berlin.de/~huck`
sowie auf
`www.hopfenwiesen.de`
online gestellt.

Einleitung Sphär. Abstand Sphär. Kreise Elliptische Ebene Sphär. Zweiecke Sphär. Dreiecke Sphär. Trigonometrie

Quellen und Referenzen

Inhalt aus:

1. **Vorlesungsvorbereitung** von Frau D. Schüth
2. Agricola, Friedrich: **Elementargeometrie**, Vieweg Verlag, 2005
3. **Dtv-Atlas der Mathematik**, 1998, Deutscher Taschenbuchverlag
4. **Lexikon der Mathematik**, 2001, Spektrum Akademischer Verlag, Stichwort: Elliptische Geometrie u.ä.
5. Reid, Szendői: **Geometry and Topology**, 2005, Cambridge University Press

Graphiken: erstellt mit xfig

Textsatz: erstellt mit PdfLaTeX und der Beamer-Klasse von LaTeX, mit dem LaTeX-Editor Kile